S. STOILOW

TEORIA FUNCŢIILOR DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

VOL. I

EDITURA DE STAT DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI — 1962

Academician S. STOILOW

TEORIA FUNCŢIILOR DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

Vol. I

NOŢIUNI ŞI PRINCIPII FUNDAMENTALE

EDITURA DE STAT DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI — 1962

PREFAȚA

Acest prim volum de Teoria funcțiilor de o variabilă complexă *cuprinde în esență principiile fundamentale ale disciplinei, rezultatele și ideile care au servit drept punct de plecare principalelor dezvoltări ale ei de la* Cauchy, Riemann *și* Weierstrass *și pînă azi.*

În linii generale, materia ce face obiectul acestui volum urmează — cu unele complemente — cursul de două semestre pe care îl țin la Facultatea de Matematică și Fizică din București.

Aproape toate din acele capitole ale Teoriei funcțiilor complexe care sînt azi în plină dezvoltare își au originea lor în una, sau în mai multe, din problemele ridicate de rezultatele teoriei clasice. Ori de cîte ori am avut ocazia s-o fac, am căutat deci nu numai să le prezint pe acestea din urmă într-o formă adecvată, dar și să deschid orizonturi spre cercetările mai speciale corespunzătoare, dînd indicațiile bibliografice necesare pentru a se putea adînci studiul lor.

Ideea aceasta de perspectivă m-a călăuzit și în alegerea materialului pentru acest volum introductiv, întocmai ca și pentru prelegerile mele universitare. Volumele următoare vor fi consacrate dezvoltării mai ample a unora din cercetările mai recente.

M-am străduit să dau prezentului volum un caracter pe cît posibil de unitar, care să facă să reiasă cît mai limpede unitatea întregii discipline. Această unitate apare de altfel ca una din trăsăturile ei cele mai caracteristice, dacă privim azi teoria funcțiilor de o variabilă complexă în ansamblul cercetării matematice moderne. Pentru acest motiv, am lăsat aici la o parte unele chestiuni de natură diferită care figurează, de obicei, sub o formă mai mult sau mai puțin succintă, în tratatele sau în manualele clasice de teoria funcțiilor (cea mai importantă dintre ele fiind studiul direct *al proprietăților funcțiilor armonice), rămînînd ca ele să facă obiectul unor capitole ale volumului următor.*

Ideea generală care străbate prezentul volum este aceea de legătură organică dintre părțile funcției, legătură care constituie esența analiticității. Ea duce în mod firesc la noțiunea de domeniu natural de existență al funcției, noțiune proprie și caracteristică întregii teorii. În jurul acestei noțiuni și a aceleia de punct singular care derivă direct din ea, am căutat să grupez rezultatele esențiale redate aici. Tabla de materii arată conținutul fiecărui capitol în parte.

Pentru punerea la punct a mai multor detalii în redactarea textului, observațiile aspirantei Cabiria Andreian, din Institutul de matematică al Academiei R.P.R., precum și ale asistentei mele Liuba Weinberg-Stecolcic de la Facultatea de matematică și fizică mi-au fost adesea utile. Le exprim aici viile mele mulțumiri.

București, mai 1953

INTRODUCERE

1. Teoria funcțiilor urmărește o clasificare logică și naturală a funcțiilor, precum și adîncirea studiului diverselor clase de funcții.

Noțiunea de funcție s-a degajat, în matematică, treptat, din considerarea feluritelor moduri de corespondență între valoarea unei anumite mărimi variabile x și aceea a alteia y, corespondență exprimată printr-o lege bine definită, în virtutea căreia, valoarea uneia din mărimi, y, este perfect determinată prin valoarea celeilalte, x.

Primele funcții astfel considerate erau obținute prin aplicarea operațiilor aritmetice elementare lui x în număr finit; apoi, studiul fenomenelor naturii a impus și considerarea de funcții exprimate printr-o infinitate de asemenea operații, adică prin treceri la limită. Aceste procedee dau însă naștere la o varietate foarte bogată de funcții, cu proprietăți foarte diferite. Pentru a le putea cuprinde și situa, adică pentru a le putea înțelege, este necesar să distingem *clase de funcții*, pe care să le caracterizăm, fiecare, prin acele proprietăți ale lor, care sînt, pentru noi, cele mai importante, ele fiindu-ne cele mai utile atunci cînd, prin funcții, vrem să descriem fenomenele naturii.

Pentru prima dată o asemenea încercare de clasificare sistematică a fost făcută de L e o n a r d E u l e r, pe la mijlocul secolului al XVIII-lea. Legată de noțiunea intuitivă de curbă, prin crearea geometriei analitice, precum și de cele mai variate fenomene de mișcare, prin introducerea calculului infinitezimal, noțiunea de funcție — adică de dependență matematică între mărimi — trebuia extinsă considerabil față de vechea concepție aritmetico-algebrică; ea se cerea însă totodată delimitată, pentru a rămîne susceptibilă de a fi studiată prin metodele matematicii și în special accesibilă puternicului instrument nou creat pe care-l constituia calculul infinitezimal.

În opera sa *Introductio in analysis infinitorum*, apărută în 1748 la Lausanne, L. E u l e r a încercat o astfel de delimitare a domeniului funcțiilor analizei matematice, precum și o clasificare a lor pe baza procesului lor de formație.

Postulatele generale la care trebuie să satisfacă un asemenea domeniu de funcții — numite mai tîrziu *funcții analitice* * —, pentru ca delimitarea acestui domeniu să corespundă scopului urmărit, nu apar încă în mod destul de limpede la L. E u l e r. Ele se pot formula astăzi în modul următor:

---

* Termen introdus de J. L. L a g r a n g e (1806), deși într-un sens care nu coincide întocmai cu cel de azi.

1° Domeniul trebuie să fie destul de vast pentru a cuprinde cele mai multe din funcțiile care se prezintă în problemele de geometrie, de mecanică, de fizică și, în general, în studiul fenomenelor naturii.

2° El trebuie să constituie un *sistem închis* în raport cu principalele operații ale aritmeticii, ale algebrei și ale analizei, adică aceste operații [operațiile elementare ale aritmeticii, rezolvarea de ecuații algebrice, derivarea și integrarea] aplicate funcțiilor din domeniul nostru delimitat să nu ne ducă în afara acestui domeniu.

3° Fiecare dintre funcțiile considerate trebuie să formeze oarecum *un tot organic legat*. De exemplu, dacă funcția este reprezentată printr-o curbă, trebuie să putem spune că această curbă este *aceeași* în toată întinderea ei, cu aceleași proprietăți geometrice, și nu, de exemplu, cum ar fi o linie formată dintr-un segment de dreaptă continuat printr-un arc curb oarecare.

Dacă postulatele 1° și 2° sînt aici formulate în mod precis, nu tot astfel stau însă lucrurile cu postulatul 3°. Să ne oprim un moment asupra acestuia, pentru a lămuri mai deplin sensul lui.

S-a crezut altădată — încă pe la începutul secolului trecut — că este suficient ca o funcție $y = f(x)$ să aibă aceeași «expresie analitică» în tot intervalul ei de definiție pentru ca ea să reprezinte aceeași curbă geometrică. Or, exemple simple arată contrariul.

Să considerăm funcția definită prin seria

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2}(x^2-1)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}(x^2-1)^2+\ldots\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1\cdot 2\ldots n}(x^2-1)^n+\ldots$$

Seria este convergentă pentru $|x^2-1|\leqslant 1$, adică pentru $|x|\leqslant\sqrt{2}$. În acest interval, ea are ca sumă $x+\sqrt{x^2}$, adică $f(x)\equiv 0$ pentru $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 0$, și $f(x)=2x$ pentru $0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ *.

Funcția $y = xf(x)$ reprezintă, așadar, o curbă formată dintr-un segment de dreaptă, continuat printr-un arc de parabolă.

Deși această funcție este definită printr-o aceeași expresie analitică (seria de mai sus) în tot intervalul ei de definiție, ea nu poate fi considerată ca o funcție «analitică» în acest interval, în sensul postulatelor de mai sus, deoarece ea nu satisface postulatului 3°.

Strădaniile pentru constituirea unei teorii a funcțiilor analitice în sensul definit prin 1°, 2° și 3° nu au izbutit în mod desăvîrșit decît prin opera lui A. L. Cauchy, K. Weierstrass și B. Riemann, pe la mijlocul secolului al XIX-lea.

Elementul principal care a permis aceasta a fost înlocuirea variabilei x prin variabila complexă $x + iy = z$, susceptibilă de a lua valori dintr-o regiune oarecare a planului lui Gauss-Cauchy.

Cum se explică necesitatea introducerii variabilei complexe $x + iy$ în locul variabilei reale x și unde stă rațiunea adîncă a acestei necesități?

---

* A se vedea mai departe capitolul II, § 4.

Răspunsul cel mai satisfăcător la această întrebare ni-l dă rezultatul obținut în 1932 de matematicianul sovietic L. P o n t r e a g h i n. Acest rezultat se poate formula astfel. *Dintre toate corpurile continue* * care satisfac anumite condiții topologice uzuale **, singurul în care înmulțirea este comutativă și care, totodată, este închis în raport cu rezolvarea ecuațiilor algebrice *** este corpul numerelor complexe ordinare (adică cel menționat mai sus). Deci singurul sistem convenabil cu care putem satisface postulatul 2° este cel al numerelor complexe. Teoria funcțiilor de o variabilă complexă creată de A. L. C a u c h y, K. W e i e r s t r a s s și B. R i e m a n n, a arătat, în plus, că ea este în măsură să satisfacă și postulatul 3°.

Funcțiile pe care la vom considera vor fi deci funcții de variabilă complexă $z = x + iy$ (x și y reali oarecare; x este numit «partea reală» a lui z, iar y este «partea sa imaginară»).

Valoarea funcției va fi, și ea, o valoare complexă $u = s + it$, iar funcția complexă $u = f(z)$ va fi o lege oarecare, care face să corespundă oricărei valori complexe z (adică oricărei perechi de valori reale x și y) dintr-o regiune anumită a planului (z) al variabilelor x și y, o valoare complexă u bine determinată (adică o pereche bine determinată de valori reale s și t) din planul (u) al variabilelor s și t.

Relația scrisă simbolic $u = f(z)$ revine așadar, de fapt, la cele două relații

$$s = s(x, y),$$
$$t = t(x, y)$$

în care s și t sînt funcții reale de variabilele reale x și y ****.

Printre funcțiile analitice considerate va trebui, în primul rînd, să admitem funcțiile raționale de z, pentru a satisface postulatul 2°. Dar acestea singure nu constituie un domeniu de funcții destul de vast pentru a satisface postulatul 1° și nici nu formează un sistem închis în raport cu operațiile de rezolvare a ecuațiilor algebrice sau cu integrarea.

Vom lărgi domeniul nostru de funcții prin considerarea seriilor de forma

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

în care c_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) sînt constante complexe arbitrare, serii care constituie o extensiune a formei polinomiale și vom vedea că, plecînd de la asemenea serii, numite serii *întregi* sau serii de *puteri*, se construiește o teorie a funcțiilor analitice satisfăcînd toate postulatele de mai sus.

Punctul acesta de vedere oarecum elementar, care este cel al lui K. W e i e r s t r a s s (și C h. M é r a y), duce de altfel la aceeași noțiune

---

* Un corp este un sistem închis în raport cu cele patru operații elementare ale aritmeticii. Corpul este continuu (sau topologic) dacă aceste operații elementare sînt continue.

** Condițiile acestea privesc exclusiv structura calitativă a spațiului abstract care servește de suport corpului.

*** Ceea ce, după cum se știe, face și importanța deosebită a corpului complex în algebră.

**** Se notează cu $\mathfrak{R}f$ și $\mathfrak{I}f$, respectiv, partea reală $s(x, y)$ și partea imaginară $t(x, y)$ a funcției f.

de funcție analitică, ca și cel diferențial și geometric al lui A. L. Cauchy și B. Riemann, bazat pe existența derivatei și care va fi dezvoltat, de noi, paralel cu cel dintîi.

2. Presupunem cunoscute atît calculul cu numerele complexe și egalitățile și inegalitățile elementare corespunzătoare, cît și noțiunile relative la șiruri de cantități complexe. Reamintim aici pe scurt principalele proprietăți de care ne vom servi.

Calculul cu numerele complexe se bazează în întregime pe definiția sumei

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

și a produsului

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Din definiția *modulului* $|z| = r$ al lui z și a *argumentului* θ al lui z se deduce îndată

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

precum și

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad , \quad |z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$$
$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad , \quad |z_1/z_2| = |z_1| \,/\, |z_2|$$

și că $z_1 z_2 = 0$ implică $z_1 = 0$ sau $z_2 = 0$.

De asemenea,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \text{ și } \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Un șir de numere complexe $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ este convergent și are ca limită pe $l = \alpha + \beta i$, dacă — și numai dacă — șirurile $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ și $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ sînt convergente și au, respectiv, ca limite pe α și pe β.

Condiția necesară și suficientă a lui Cauchy pentru ca șirul (z_n) să fie convergent se exprimă întocmai ca pentru un șir real: fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un N_ε astfel ca, dacă $n > N_\varepsilon$ și $n' > N_\varepsilon$, să avem $|z_n - z_{n'}| < \varepsilon$.

O serie de cantități complexe este sau nu convergentă dacă cele două serii formate respectiv din părțile reale ale termenilor și din părțile imaginare ale lor sînt *ambele* convergente sau nu. Ea este absolut convergentă dacă seria formată din modulele termenilor este convergentă; ceea ce, din cauza inegalităților

$$|x| \leqslant |z|, \; |y| \leqslant |z|$$
$$|x| + |y| \geqslant |z|,$$

revine la a spune că seria este absolut convergentă dacă — și numai dacă — seriile formate, respectiv, din părțile reale și din cele imaginare ale termenilor sînt ambele absolut convergente.

Într-o serie absolut convergentă se poate schimba ordinea termenilor într-un mod arbitrar, fără a altera nici convergența, nici suma seriei.

De asemenea, într-o serie dublă (serie de serii) care este absolut convergentă, sumarea se poate face, indiferent, pe linii sau pe coloane.

În sfîrșit, dacă seriile cu termeni complecși $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sînt absolut convergente, seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} [u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0]$$

este și ea absolut convergentă și are ca sumă produsul celor două serii.

Toate acestea rezultă ușor din proprietățile analoge ale seriilor cu termeni *reali*, descompunînd seria complexă în cele două serii componente: cea a părților reale ale termenilor și cea a părților lor imaginare *.

3. În sfîrșit, cu privire la funcțiile complexe $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ de variabila complexă $z = x + iy$, să observăm că a spune că $f(z)$ este *continuă în* $z = z_0$ revine la a spune că P și Q sînt, ambele, continue în $x = x_0$, $y = y_0$; a spune că ș i r u l de funcții complexe $f_n(z)$ este *uniform convergent* într-o regiune din planul (z), revine la a spune că șirurile $P_n(x, y)$ și $Q_n(x, y)$, unde $f_n(z) = P_n(x, y) + iQ_n(x, y)$, sînt, ambele, uniform convergente în aceeași regiune din planul (x, y). Rezultă de aici că o serie de funcții complexe continue într-o regiune a planului, uniform convergentă în aceeași regiune, *reprezintă o funcție complexă continuă în această regiune.*

Vom face uz de această observație în numeroase cazuri.

* Pentru toate aceste chestiuni, precum și pentru chestiunile privitoare la produsele infinite, se poate consulta M i r o n N i c o l e s c u , *Calcul diferențial și integral*, București, 1948, vol. I.

CAPITOLUL I

NOȚIUNI PRELIMINARE

I. GENERALITĂȚI ASUPRA MULȚIMILOR

1. O mulțime X este o clasă de obiecte oarecare x, numite *elementele* ei (se scrie $x \in X$), definite printr-una sau mai multe proprietăți care caracterizează aceste elemente, adică proprietăți care le aparțin lor și numai lor. Dacă clasa nu conține nici un element, adică dacă proprietățile sînt contradictorii, se spune că X este mulțimea *nulă* (goală, deșartă) și ea se înseamnă prin 0.

Două mulțimi X_1 și X_2 fiind date, se numește *suma* (sau *reuniunea*) lor, și se înseamnă prin $X_1 + X_2$ (sau $X_1 \cup X_2$), mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile X_1 sau X_2.

Se numește *intersecție* (sau *parte comună*) a mulțimilor X_1 și X_2, și se înseamnă prin X_1X_2 (sau $X_1 \cap X_2$), mulțimea elementelor care aparțin, deodată, lui X_1 și lui X_2. Două mulțimi X_1 și X_2 care nu au nici un punct comun se numesc *disjuncte*. Avem $X_1X_2 = 0$.

În mod analog se definesc suma și intersecția unei mulțimi oarecare de mulțimi (vom spune cîteodată *familie* de mulțimi).

Aceste operații efectuate asupra mulțimilor sînt supuse relațiilor logice

$$(X_1 + X_2)X_3 = X_1X_3 + X_2X_3$$

$$(X_1 + X_2)(X_3 + X_4) = X_1X_3 + X_2X_3 + X_1X_4 + X_2X_4,$$

care se verifică imediat.

Aceste două relații au determinat pe unii autori să întrebuințeze pentru intersecție expresia de «produs», care, bineînțeles, nu are însă nimic a face cu produsul a două numere, de exemplu.

Incluziune și *complement*. Dacă toate elementele lui X_1 sînt și elemente ale lui X_2, se spune că X_1 este *cuprins* (sau *inclus*) în X_2 și se scrie $X_1 \subset X_2$; atunci X_2 cuprinde (sau include) pe X_1. Se mai spune că X_1 este *submulțime* a lui X_2.

În raport cu această relație dintre X_1 și X_2 se definește operația *complement*. Complementul lui X_1 față de X_2 este, prin definiție, mulțimea

elementelor lui X_2 care *nu sînt* elemente ale lui X_1. El se notează CX_1 cînd nu poate fi îndoială asupra mulțimii X_2 față de care este considerat complementul.

Cele trei operații, reuniunea, intersecția și complementul (aceasta din urmă față de o mulțime fixă, care cuprinde toate mulțimile cu care operăm), sînt supuse următoarelor relații logice, iarăși imediate:

$$C \cup (X) = \cap (CX) \text{ și } C \cap (X) = \cup (CX),$$

unde (X) înseamnă o mulțime oarecare de mulțimi X, iar (CX) mulțimea complementelor mulțimilor X.

2. Puterea mulțimilor. Se spune că mulțimile X_1 și X_2 au *aceeași putere* dacă este posibil să stabilim între elementele lor o *corespondență biunivocă*, adică dacă putem forma, cu aceste elemente, perechi astfel ca:

1) în fiecare pereche să se afle un $x_1 \in X_1$ și un $x_2 \in X_2$;

2) orice x_1 și orice x_2 să figureze într-o pereche;

3) nici un x_1 sau x_2 să nu figureze în mai mult de o pereche.

Puterea stabilește între mulțimi o relație de *echivalență*.

Într-adevăr, această relație este reflexivă, simetrică și tranzitivă, cum se constată îndată.

Mulțimile finite (adică acele care nu posedă decît un număr finit de elemente) au aceeași putere atunci — și numai atunci — cînd numărul elementelor lor este același.

Mulțimi numărabile. Cea mai simplă mulțime infinită (care este însăși originea noțiunii noastre de «infinit») este mulțimea numerelor naturale 1, 2, 3,..., pe care o considerăm dată intuitiv.

Se numește *numărabilă* orice mulțime care este de aceeași putere cu mulțimea numerelor naturale.

După această definiție, și după aceea a puterii, se vede că elementele a ale unei mulțimi numărabile A se pot așeza întotdeauna într-un șir infinit

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

n fiind numărul natural care corespunde lui a_n (adică acela cu care este împerecheat a_n).

Se demonstrează fără nici o dificultate că:

1° Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este o mulțime finită sau numărabilă.

2° Reuniunea unui număr finit de mulțimi numărabile sau finite este o mulțime numărabilă sau finită.

3° Reuniunea unei infinități numărabile de mulțimi numărabile sau finite este o mulțime numărabilă.

Să arătăm numai cum se demonstrează ultima din aceste propoziții.

Fie a_n^m cel de-al n-lea element (adică cel care corespunde numărului natural n) al celei de-a m-a mulțime. Avem $n = 1, 2, 3 \ldots$ și $m = 1, 2, 3 \ldots$ în mod independent unul de altul.

Să considerăm întîi numai elementele a_n^m în care $n \leqslant N$, și $m \leqslant N$, N fiind un număr natural dat. Numărul acestor elemente este finit. Le putem

deci numerota (adică le putem atribui cîte un indice număr natural, în ordinea 1, 2, 3, ...), Ultimul element va avea indicele N^2.

Să considerăm acum elementele a_n^m care nu au fost numerotate și în care $n \leqslant N + 1$, $m \leqslant N + 1$. Le vom numerota și pe acestea (care sînt tot în număr finit) începînd cu indicele $N^2 + 1$. Continuînd astfel, vom atribui fiecărui a_n^m un număr de ordine și mulțimea tuturor a_n^m este numărabilă.

Rezultă de aici, în particular, că:

1) mulțimea numerelor raționale este numărabilă;

2) mulțimea numerelor algebrice este numărabilă;

3) mulțimea punctelor din plan, sau dintr-un spațiu cartezian oarecare cu n dimensiuni, care au toate coordonatele lor raționale, este numărabilă.

Numeroase alte mulțimi pe care le vom întîlni sînt numărabile, dar în analiză se prezintă mai ales mulțimi *nenumărabile*.

Astfel, vom arăta mai întîi că mulțimea punctelor x ale unui segment de dreaptă ($0 \leqslant x \leqslant 1$) este nenumărabilă.

Demonstrația este foarte simplă. Orice număr x de pe segmentul dat se poate scrie

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_i \ldots,$$

în care simbolurile α_i reprezintă cîte una din cifrele 0, 1, 2,..., 9 într-o ordine determinată *.

Să presupunem că numerele x sînt așezate într-un șir, și fie

$$x_n = 0, \alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n \ldots \alpha_i^n \ldots \tag{1}$$

numărul căruia-i corespunde indicele n.

Să considerăm numărul

$$\xi = 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_i \ldots$$

definit astfel: $\beta_i = 1$ dacă α_i^i din expresia (1) este $\neq 1$ și $\beta_i = 2$ dacă $\alpha_i^i = 1$. Numărul ξ este pe segmentul (0,1) și totuși el nu poate fi identic cu nici unul din numerele (1), deoarece șirul (β_i) diferă de cel din (1) oricare ar fi n și oricare ar fi modul în care x_n este scris *.

Deci numerele x nu pot fi așezate într-un șir și deci mulțimea lor nu poate fi numărabilă.

3. Fie X o mulțime infinită și A o mulțime finită sau numărabilă. Vom arăta că *mulțimea $X + A$ are aceeași putere ca și X.*

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, elementele lui A. Dacă toate elementele acestea sînt și ale lui X, avem $X + A = X$ și propoziția este banală.

Să notăm deci prin a_n numai elementele lui A străine de X. Mulțimea lor (a_n) este numărabilă sau finită.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, o infinitate numărabilă (x_n) de elemente ale lui X. Cum X este infinită, ea conține o infinitate de elemente din care putem

* Sînt numere x care se pot scrie în două moduri diferite: cu un număr finit de zecimale sau cu un număr infinit de zecimale. Ele sînt așa-zisele *numere «zecimale exacte»*. Vom adopta pentru ele una oarecare din aceste scrieri.

extrage această infinitate numărabilă de elemente. Dar între $X + A$ și X putem stabili acum următoarea corespondență biunivocă: fiecărui element din X care *nu* este în (x_n) îi facem să corespundă același element în $X+A$, iar mulțimii numărabile (x_n) din X îi facem să corespundă, în mod biunivoc, elementele mulțimii numărabile $(x_n) + (a_n)$. Deci X și $X + A$ au aceeași putere.

Se vede imediat că toate segmentele $[a, b]$, adică $[a \leqslant x \leqslant b]$, au aceeași putere. Dar și dreapta infinită $-\infty < x' < +\infty$ are aceeași putere cu aceste segmente. Într-adevăr, relația

$$x' = \operatorname{tg} x$$

stabilește o corespondență biunivocă între dreapta infinită și mulțimea

$$-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}.$$

Dar această mulțime nu diferă decît prin punctele $x = \pm\frac{\pi}{2}$ de segmentul $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, deci, în baza propoziției de mai sus, ea are aceeași putere ca acesta din urmă. Vom arăta acum că *mulțimea formată din pătratul* $[0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1]$ *are aceeași putere ca segmentul* $[0 \leqslant \xi \leqslant 1]$ (Teorema lui G. Cantor *).

Să observăm că pătratul de mai sus este o mulțime de aceeași putere cu aceea a tuturor punctelor din el care au ambele lor coordonate iraționale.

Într-adevăr, mulțimea ($x = x_0$, $y =$ irațional și cuprins între 0 și 1) are, în baza propoziției de mai sus, aceeași putere cu mulțimea ($x = x_0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$).

Aceasta fiind adevărat pentru orice $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$, rezultă că pătratul are aceeași putere cu mulțimea ce se obține scoțînd din el punctele cu y rațional. Acest rest are, la rîndul lui, aceeași putere cu mulțimea ce se obține scoțînd din el punctele cu x rațional, adică cu mulțimea punctelor din pătrat cu ambele lor coordonate iraționale.

Pe de altă parte, segmentul $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ are aceeași putere cu mulțimea punctelor iraționale cuprinse între 0 și 1.

Rămîne deci de arătat că mulțimea numerelor cuprinse între 0 și 1 este de aceeași putere cu mulțimea punctelor din pătratul considerat care au ambele lor coordonate iraționale.

Or, o corespondență biunivocă între aceste două mulțimi se stabilește ușor. Să scriem punctele pătratului.

$$\begin{cases} x = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots) \\ y = (q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots), \end{cases}$$

în care p_i și q_i sînt, respectiv, cîturile incomplete din fracția continuă care reprezintă numărul irațional respectiv, și să facem să corespundă lui (x, y) punctul de pe (0, 1) care se scrie

$$\xi = (p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n, \ldots).$$

* Georg Cantor este fondatorul teoriei mulțimilor.

Demonstrația ar fi cu totul analogă pentru punctele unui hipercub din spațiul cartezian cu un număr oarecare de dimensiuni.

Cum fiecare hipercub se transformă biunivoc în spațiul respectiv (de exemplu prin raze vectoare în felul cum am transformat mai sus segmentul finit în dreapta infinită) se vede cu ușurință că puterea mulțimii punctelor segmentului (0, 1) *este aceeași cu a unui spațiu cartezian* cu un număr oarecare de dimensiuni. Puterea aceasta se numește, de aceea, *puterea continuului*.

II. MULȚIMI DE NUMERE COMPLEXE

4. În secțiunea precedentă a fost vorba de mulțimi abstracte, adică de mulțimi ale căror elemente, de natură arbitrară, nu aveau între ele nici un fel de relații speciale aritmetico-algebrice sau de continuitate.

Existența unor asemenea relații «organizează» mulțimea, înzestrînd-o cu o «structură» algebrică sau topologică.

Mulțimea numerelor complexe este o astfel de mulțime organizată din două puncte de vedere: ea are o structură algebrică, cea de *corp*, și, totodată, ea posedă o structură topologică, cea de *spațiu* (spațiul euclidian cu două dimensiuni, adică planul). În această dublă calitate, ea are proprietăți atît algebrice și metrice, cît și topologice.

Vom da aici în special unele noțiuni și proprietăți de natură topologică, proprietățile esențiale aritmetico-algebrice ale mulțimii numerelor complexe fiind cunoscute din calculul cu numerele complexe și din algebra clasică.

Aceste noțiuni topologice elementare se extind de altfel fără nici o dificultate la spații euclidiene n-dimensionale și chiar la spații mult mai generale.

Cum numerele complexe, cu care vom avea de-a face în mod exclusiv aici, se reprezintă însă, după cum se știe, pe planul lui Gauss-Cauchy, pe care-l vom desemna prin (z) *, ne vom mărgini, în expunerea noastră, la cazul bidimensional al planului.

5. Noțiunea fundamentală de care ne servim de obicei pentru a introduce într-o mulțime abstractă un concept de continuitate, adică o topologie, este noțiunea de *vecinătate*.

Fie a un număr complex oarecare: el este reprezentat printr-un punct determinat (pe care-l notăm tot prin a) din planul Gauss-Cauchy raportat la cele două axe rectangulare ale sale, axa reală și axa pur imaginară. Vom desemna orice punct din plan prin numărul complex pe care-l reprezintă.

Mulțimea punctelor z din plan, care satisfac inegalitatea

$$|z - a| < r,$$

unde r este un număr pozitiv dat oarecare, se numește *o vecinătate a lui a*. Este clar că ea reprezintă *interiorul cercului de centru a și de rază r* (fără circumferință).

Orice punct z are deci o infinitate de vecinătăți.

Fie dată o mulțime oarecare A de puncte a din plan.

* Vom completa acest plan mai tîrziu prin punctul de la infinit.

Spunem că un punct α este un *punct de acumulare al mulțimii* A, dacă orice vecinătate a lui α cuprinde cel puțin un punct din A diferit de α.

Aceasta revine la a spune că orice vecinătate a lui α cuprinde o infinitate de puncte a lui A, deoarece dacă, α fiind un punct de acumulare în sensul definit mai sus, într-o vecinătate a lui α nu s-ar afla decît un număr finit de puncte $a \neq \alpha$, unul din acestea ar fi cel mai apropiat de α, fie $a_0 \neq \alpha$.

În vecinătatea

$$|z - \alpha| < |\alpha - a_0|$$

nu s-ar mai afla atunci nici un punct a diferit de α și am ajunge deci la o contradicție.

Punctul de acumulare α poate să facă parte sau nu din A.

Este clar că o mulțime finită nu poate avea nici un punct de acumulare și că orice punct de acumulare al mulțimii $A_1 \subset A$ este punct de acumulare al lui A.

O b s e r v a ț i e. Se vede ușor că, dacă α este punct de acumulare al lui A, *există atunci un șir de elemente* a_n *ale lui* A, *care are ca limită pe* α, adică șirul (a_n) *converge către* α. Într-adevăr, dacă luăm succesiv vecinătățile

$$|z - \alpha| < 1, |z - \alpha| < \frac{1}{2}, \ldots, |z - \alpha| < \frac{1}{n}, \ldots$$

și în fiecare din acestea cîte un punct din A, fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ respectiv, șirul astfel obținut converge către α.

Un șir infinit oarecare de valori complexe distincte fiind dat, convergența și neconvergența sa revin, respectiv, la existența unui singur punct de acumulare, a nici unuia sau a mai multor puncte de acumulare. În acest din urmă caz, acestea sînt limitele diverselor subșiruri convergente ale șirului dat.

6. O mulțime A de puncte din plan se numește *mărginită* dacă există un număr M astfel încît pentru orice punct a al mulțimii să avem $|a| < M$.

O mulțime mărginită este deci întotdeauna cuprinsă într-un cerc, într-un pătrat etc., convenabil alese.

T e o r e m ă (Weierstrass-Bolzano). *Orice mulțime infinită și mărginită are cel puțin un punct de acumulare.*

Mulțimea A fiind mărginită, o putem include într-un pătrat destul de mare Q_0, cu laturile paralele cu axele.

Să împărțim acest pătrat în patru subpătrate egale, prin drepte duse prin centrul său și paralele cu laturile. Cum mulțimea A este infinită, cel puțin unul din aceste subpătrate conține (laturile lui sînt considerate făcînd parte din el) o infinitate de puncte din A. Fie de exemplu Q_1 un asemenea subpătrat. Acesta se află însă acum exact în condițiile lui Q_0. Putem deci raționa în ceea ce privește Q_1 exact în același mod în care am raționat pentru Q_0 și, împărțindu-l în patru subpătrate, unul din acestea cel puțin va conține o infinitate de puncte din A. Continuînd astfel, obținem un șir de pătrate

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots,$$

fiecare din aceste pătrate fiind subpătrat al precedentului și fiecare conținînd o infinitate de puncte din A.

Să însemnăm prin y_n și $y'_n (y'_n > y_n)$ ordonatele laturilor orizontale ale lui Q_n, iar prin x_n și $x'_n (x'_n > x_n)$ abscisele laturilor sale verticale.

Șirul y_n, ca și șirul x_n, este monoton nedescrescător, șirul y'_n, ca și șirul x'_n, este monoton necrescător. Cum șirurile sînt mărginite de ordonatele și de abscisele laturilor lui Q_0 și cum, pe de altă parte, $y'_n - y_n$ și $x'_n - x_n$ tind către zero cu $\frac{1}{n}$, șirurile (y_n), (y'_n) au o limită comună, y_0, iar șirurile (x_n) și (x'_n) au o limită comună x_0.

Fie α punctul de coordonate (x_0, y_0). După definiția lui y_n și y'_n și a lui x_n și x'_n, este clar că orice punct din Q_0 cu ordonata y_0 va fi cuprins în banda orizontală limitată de cele două laturi orizontale ale lui Q_n și că oricare punct din Q_0 cu abscisa x_0 va fi cuprins în banda verticală limitată de cele două laturi verticale ale lui Q_n; aceasta, oricare ar fi n.

Deci α este cuprins în orice Q_n din șirul nostru.

Să considerăm atunci o vecinătate arbitrară dată a lui α. De la un anumit n înainte, Q_n va fi cuprins în această vecinătate pentru că el cuprinde pe α și pentru că laturile sale tind către zero cu $\frac{1}{n}$. Orice Q_n cuprinde însă o infinitate de puncte din A. Prin urmare, și vecinătatea dată va cuprinde o infinitate de puncte din A și deci α este punct de acumulare al lui A.

7. Un punct a al lui A care *nu* este punct de acumulare al lui A se numește *punct izolat* al lui A. Există atunci un r astfel ca $|z - a| < r$ să nu cuprindă nici un alt punct al lui A decît a.

T e o r e m ă. *O mulțime A care nu are decît puncte izolate este finită sau numărabilă.*

Mulțimea A nu mai este presupusă aici mărginită.

Să împărțim deci acum planul întreg în pătrate egale cu 1, ducînd paralele la axe prin punctele

$$z = +1, -1, +2, -2, \ldots$$

și

$$z = i, -i, 2i, -2i, \ldots$$

Fie (Q) familia acestor pătrate. Fiecare dintre ele se vor împărți în patru subpătrate ca în teorema din § 6 și vom obține astfel pătrate formînd o familie (Q'). Vom continua, împărțind fiecare din pătratele din (Q') în cîte patru subpătrate care vor forma o familie (Q'') și împărțind pe acestea la rîndul lor, vom obține astfel familiile (Q^m), formînd un fel de pavaj din ce în ce mai mărunt al planului.

Fiecare punct $a \in A$ fiind prin ipoteză izolat, putem găsi un pătrat dintr-o familie din cele de mai sus, care să conțină pe a și să nu conțină nici un alt punct al lui A, nici în interiorul său, nici pe laturile sale.

Într-adevăr, laturile pătratelor din familiile (Q), (Q'),..., (Q^m),... tinzînd către 0, dacă alegem familia destul de departe în șirul de mai sus, pătratul care va conține pe a nu va mai cuprinde alt punct din A.

Deci, fiecărui punct $a \in A$ i se poate astfel atribui un pătrat dintr-o familie și la două puncte distincte vor corespunde neapărat pătrate distincte. Avem, așa dar, o corespondență biunivocă între punctele $a \in A$ și o parte din pătratele noastre. Or, mulțimea tuturor acestor pătrate este numărabilă, deoarece în fiecare familie avem o infinitate numărabilă de pătrate și mulțimea familiilor este numărabilă. Deci A este numărabilă sau finită.

8. Am spus că un punct de acumulare α al mulțimii A poate să aparțină, sau nu, mulțimii A. Mulțimea formată din punctele de acumulare ale lui A se numește *mulțimea derivată a lui* A și se însemnă prin A'.

A și B fiind două mulțimi din plan, avem evident

$$(A + B)' = A' + B'$$

orice punct de acumulare al lui A sau al lui B fiind punct de acumulare al lui $A + B$, și reciproc, orice punct de acumulare al lui $A + B$ trebuind să fie punct de acumulare al lui A sau al lui B.

Relația de mai sus se extinde numaidecît la un număr finit oarecare de mulțimi.

Avem

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)' = A_1' + A_2' + \ldots + A_n'$$

Se numește *închidere a lui* A mulțimea $A + A'$ și se notează cu $\bar{A}$.

9. O mulțime A se numește *închisă* dacă $A' \subset A$.

Considerăm orice mulțime pentru care $A' = 0$ ca mulțime închisă.

T e o r e m ă. *Mulțimea derivată a unei mulțimi arbitrare este o mulțime închisă.*

Fie, într-adevăr, α' un punct de acumulare al lui A'. În orice vecinătate a lui α', fie $|z - \alpha'| < r$, se află puncte ale lui A'. Fie a' un asemenea punct. Dar a' este punct de acumulare al lui A. Deci, în orice vecinătate a sa există o infinitate de puncte $a \in A$.

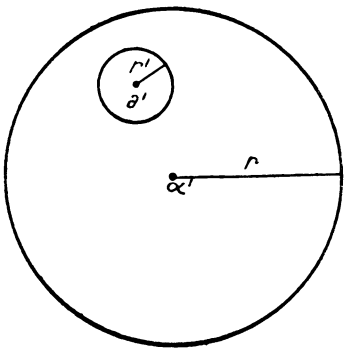


Fig. 1

Să alegem ca vecinătate a lui a' un cerc $|z - a'| < r'$ interior cercului $|z - \alpha'| < r$. Prin urmare, și în $|z - \alpha'| < r$ există o infinitate de puncte ale lui A și deci α' este un punct de acumulare al lui A, adică $\alpha' \in A'$.

C o r o l a r. De aici rezultă îndată că orice închidere $\bar{A}$ este mulțime închisă, dacă ne referim la definiția lui $\bar{A}$ și la proprietatea, semnalată în paragraful precedent, a mulțimii derivate a unei sume de două mulțimi.

Se numește *mulțime deschisă* o mulțime al cărei complement (față de planul întreg) este o mulțime închisă.

Orice vecinătate a unui punct a din plan este o mulțime deschisă. Într-adevăr, o vecinătate a lui a fiind o mulțime de puncte z definită prin

$$|z - a| < r,$$

mulțimea complementară este definită prin

$$|z - a| \geqslant r.$$

Este clar că aceasta este o mulțime închisă, toate punctele ei de acumulare trebuind să satisfacă aceleași inegalități-egalități.

Se numește uneori vecinătate «închisă» a lui a mulțimea

$$|z - a| \leqslant r.$$

Se vede că, pe cînd vecinătatea lui a este formată numai din punctele din interiorul cercului, vecinătatea închisă a lui a este formată din cercul «plin», adică din cerc împreună cu circumferința lui.

10. Operații asupra mulțimilor închise și deschise. Se înseamnă de obicei cu F mulțimile închise, iar cu G cele deschise.

Cum

$$CF = G,$$

avem și

$$CG = F.$$

Suma unui număr finit de mulțimi închise este o mulțime închisă. Se vede, într-adevăr, îndată că, dacă

$$E = F_1 + F_2 + \ldots + F_n,$$

orice punct de acumulare al lui E trebuie să fie punct de acumulare a cel puțin uneia din mulțimile F_j ($j = 1,2,..,n$) și deci trebuie să fie în această mulțime F_j și, prin urmare, în E.

Deci E este și ea o mulțime F.

De asemenea, aplicînd acestui rezultat relațiile logice dintre complementele sumelor și intersecțiilor de mulțimi din secțiunea precedentă, avem

$$C(G_1 \cdot G_2 \ldots G_n) = CG_1 + CG_2 + \ldots + CG_n = F_1 + F_2 + \ldots + F_n,$$

adică *intersecția unui număr finit de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.*

Dacă aceste două rezultate sînt valabile numai pentru un număr finit de mulțimi*, apoi următoarele două, în care rolul mulțimilor închise și deschise este intervertit față de cel de sus, sînt valabile și pentru o familie infinită *oarecare* de mulțimi. Să arătăm mai întîi că *intersecția unei infinități oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.*

Într-adevăr, intersecția E a mulțimilor închise (F), făcînd parte din fiecare din mulțimile F, își are punctele de acumulare printre punctele de

* De exemplu, mulțimea formată din reuniunea segmentelor σ_n: $\left[x = \frac{1}{n},\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right]$, $n = 1, 2, 3,\ldots$ nu este închisă, deși fiecare din σ_n este mulțime închisă. Tot astfel, intersecția complementelor $C\sigma_n$ nu este o mulțime deschisă.

acumulare ale acestei mulțimi F, adică chiar în mulțimea F, aceasta fiind închisă. Deci, punctele de acumulare ale intersecției E sînt în toate mulțimile F și deci în E.

De aici, aplicînd relația logică relativă la complementele mulțimilor F, rezultă că *suma unei infinități oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.*

11. Punctul $a \in A$ se numește *punct interior* al lui A, dacă, împreună cu a, aparține lui A și o vecinătate a lui a, adică dacă există un $r > 0$ astfel ca mulțimea punctelor z, definită prin

$$|z - a| < r,$$

să aparțină lui A.

Se vede îndată din însăși definiția mulțimilor deschise, că orice mulțime deschisă G nu are decît puncte interioare, deoarece orice punct al lui G care nu ar fi interior ar fi punct de acumulare al lui CG, care atunci nu ar fi închis.

Reciproc, orice mulțime care nu are decît puncte interioare este deschisă.

Într-adevăr, ea nu poate cuprinde nici un punct de acumulare al mulțimii ei complementare, care este, deci, mulțime închisă.

Prin urmare, *mulțimile deschise sînt mulțimile care nu au decît puncte interioare.* (Aceasta poate fi considerată ca o altă definiție a mulțimilor deschise.)

Fie dată o mulțime oarecare A.

Orice punct interior al mulțimii complementare CA se numește *punct exterior* al mulțimii A.*

Un punct al planului care nu este nici interior nici exterior lui A se numește *punct frontieră al lui A.* Mulțimea punctelor frontieră formează *frontiera lui A,* care este totdeodată și frontiera lui CA.

Mulțimea punctelor interioare ale unei mulțimi oarecare A se numește *interiorul* lui A. Ea formează evident o mulțime deschisă. Deci, mulțimea punctelor exterioare ale ei formează altă mulțime deschisă (interiorul lui CA).

Suma lor este deci deschisă și complementul acestei sume, adică frontiera lui A, este mulțime închisă.

Orice frontieră este deci mulțime închisă.

Orice mulțime închisă își conține frontiera. Orice mulțime deschisă nu conține nici un punct al frontierei sale. De altfel, aceste proprietăți caracterizează, respectiv, mulțimile închise și pe cele deschise.

O b s e r v a ț i e. Planul întreg, cuprinzînd evident orice punct de acumulare al său, este deci mulțime închisă. Pe de altă parte, el neposedînd decît puncte interioare este deci și mulțime deschisă. Deci, planul întreg este mulțime totdeodată închisă și deschisă și, prin urmare, complementul său, mulțimea 0 trebuie considerată și ea ca mulțime totdeodată deschisă și închisă. Acestea sînt de altfel singurele mulțimi din plan care sînt simultan

* Nu trebuie confundat un *punct exterior* lui A, *cu un punct străin* de A. Orice punct exterior este străin, reciproca nefiind însă adevărată.

închise și deschise. Vom reveni asupra acestei observații cînd vom defini conexitatea.

12. Mulțimi compacte. Pentru mulțimile închise și mărginite există o teoremă de acoperire de o mare utilitate în diverse chestiuni de teoria funcțiilor și de topologie.

Să considerăm o familie oarecare $(\mathcal{G})$ de *mulțimi deschise*, acoperind o mulțime K. Înțelegem prin aceasta că fiecare punct din K este cuprins în cel puțin una din mulțimile din $(\mathcal{G})$.

Se mai spune că familia $(\mathcal{G})$ constituie «o acoperire» a lui K.

O mulțime K se zice *compactă* dacă din orice acoperire $(\mathcal{G})$ a lui K se poate extrage o acoperire finită a lui K (adică un număr finit de mulțimi care constituie o acoperire a lui K).

Teoremă (Borel-Lebesgue). *O mulțime K este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.*

Vom arăta mai întîi că orice mulțime închisă și mărginită K este compactă.

Demonstrația se poate face raționînd întocmai ca pentru teorema lui Weierstrass-Bolzano.

Să presupunem că nu ar exista nici o acoperire finită pentru K, extrasă din $(\mathcal{G})$. Cum K este mărginit, el poate fi inclus într-un pătrat Q_0 *. Împărțind pe Q_0 în patru subpătrate egale, ca mai sus, pentru cel puțin unul din aceste subpătrate, Q_1, vor fi realizate condițiile următoare:

1° $Q_1 K \neq 0$ și compact.

2° Nu există pentru $Q_1 K$ o acoperire finită extrasă din $(\mathcal{G})$.

Cum $Q_1 K$ se află atunci tocmai în situația lui K, iar Q_1 în situația lui Q_0, putem raționa asupra lor la fel, și, continuînd astfel, vom obține un șir de pătrate

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots,$$

fiecare cuprins în precedentul și satisfăcînd condițiile următoare:

1° $Q_n K \neq 0$ și compact.

2° Nu există pentru $Q_n K$ acoperire finită extrasă din $(\mathcal{G})$.

Punctul α comun tuturor pătratelor din șirul de mai sus este în K sau este punct de acumulare al lui K, din cauza condiției 1°. Cum K este închis, avem și atunci $\alpha \in K$. Dar dacă $\alpha \in K$, el este cuprins într-un anumit G_0 din familia $(\mathcal{G})$. Cum G_0 este deschis, el cuprinde împreună cu α și un cerc C de centru α. Or, Q_n, oricare ar fi n, cuprinde pe α, iar latura lui Q_n tinde către zero cu $1/n$.

Deci, pentru n destul de mare, $Q_n \subset C \subset G_0$.

Aceasta înseamnă însă că Q_n posedă o acoperire finită extrasă din $(\mathcal{G})$ (acoperire formată din G_0 singur), ceea ce contrazice condiția 2° a lui $Q_n K$.

Ipoteza de la care am plecat este, așadar, inadmisibilă și K posedă deci o acoperire finită extrasă din $(\mathcal{G})$.

Invers, trebuie arătat că dacă mulțimea A nu este închisă sau nu este mărginită, există cel puțin o acoperire infinită $(\mathcal{G})$, din care nu se poate extrage o acoperire finită a lui A.

---

* A se vedea demonstrația din 6.

Să arătăm aceasta pentru mulțimile neînchise (cazul mulțimilor nemărginite s-ar trata în mod cu totul analog).

Fie A o mulțime neînchisă. Să considerăm un punct de acumulare al ei *care nu-i aparține* și pe care îl putem presupune ca fiind $z = 0$. Să considerăm familia $(\mathcal{G})$ a mulțimilor deschise definite prin

$$G_0: \left[|z| > \frac{1}{4}\right], \quad G_1: \left[\frac{1}{8} < |z| < \frac{1}{2}\right]$$

$$G_2: \left[\frac{1}{16} < |z| < \frac{1}{4}\right], \quad G_3: \left[\frac{1}{32} < |z| < \frac{1}{8}\right]$$

.....

$$G_n: \left[\frac{1}{2^{n+2}} < |z| < \frac{1}{2^n}\right],$$

.....

Această familie acoperă tot planul, în afară de punctul $z = 0$ și deci toată mulțimea A (care prin ipoteză nu conține pe $z = 0$). Oricum am extrage din ea un număr finit de mulțimi G_n, una dintre ele, fie G_{n_1}, are indicele cel mai mare. Punctele lui A din $|z| < \frac{1}{2^{n_1+2}}$ nu mai sînt însă atunci acoperite; dar A are neapărat puncte în $|z| < \frac{1}{2^{n_1+2}}$, deoarece această mulțime este vecinătate a lui $z = 0$, care este punct de acumulare a lui A. Deci, din familia $(\mathcal{G})$ nu se poate extrage o acoperire finită a lui A. Compararea teoremei lui Borel-Lebesgue cu teorema lui Weierstrass-Bolzano arată că mulțimile compacte K pot fi *caracterizate* prin proprietatea că *orice submulțime infinită a lui K are un punct de acumulare situat în K.*

13. Conexitate. O mulțime A se spune că este *conexă* dacă, oricum am descompune-o în două mulțimi A_1 și A_2, disjuncte și ambele diferite de 0, cel puțin una din mulțimile A_1 sau A_2 are cel puțin un punct de acumulare în cealaltă (adică $A_1'A_2 \neq 0$ sau $A_1A_2' \neq 0$).

Un segment de dreaptă este o mulțime conexă. Să presupunem într-adevăr că ar exista două submulțimi A_1 și A_2 ale segmentului σ astfel ca

$$A_1 + A_2 = \sigma, \quad A_1A_2 = 0, \quad A_1 \neq 0, \quad A_2 \neq 0$$

și

$$A_1' A_2 = 0, \quad A_1A_2' = 0.$$

Fie atunci $a_1 \in A_1$ și $a_2 \in A_2$. Putem desemna fiecare punct a al lui σ prin distanța lui măsurată pe segment, fie s, la una din extremitățile segmentului aleasă ca origine. Putem deci vorbi de puncte de pe σ așezate la «dreapta» sau la «stînga» unui punct dat pe segmentul σ. Să presupunem pe a_2 la dreapta lui a_1.

Cum a_1 nu este punct de acumulare al lui A_2, există puncte s la dreapta lui a_1 astfel că segmentul (a_1, s) să fie străin de A_2. Fie λ marginea superioară

a valorilor s care satisfac această condiție. Punctul λ nu poate aparține lui A_2 deoarece atunci ar fi punct de acumulare (de la stînga) al lui A_1, ceea ce ar contrazice ipoteza $A_1' A_2 = 0$. Dar cum λ este marginea superioară indicată mai sus, el este punct de acumulare (de la dreapta) al lui A_2 deci, cum $A_1 A_2' = 0$, el nu poate fi nici în A_1. Cum λ este totuși pe σ și avem $A_1 + A_2 = \sigma$, se vede că ajungem la o contradicție. Deci σ este conex.

Se vede îndată că raționamentul de mai sus se poate repeta pentru orice mulțime A avînd proprietatea că două puncte oarecare ale ei pot fi unite printr-o linie poligonală*, linie în întregime așezată în A. Ajunge să alegem pe $a_1 \in A_1$ și pe $a_2 \in A_2$ și să le unim cu o astfel de linie pe care putem atribui, întocmai ca pe σ, fiecărui punct o distanță s (măsurată pe această linie) la una din extremitățile ei aleasă ca origine și raționamentul urmează întocmai ca mai sus.

Deci, în particular, *planul întreg este o mulțime conexă*; *planul întreg din care am scos un număr finit de puncte este tot o mulțime conexă*.

Dimpotrivă, nu este conexă mulțimea obținută prin scoaterea unui punct, diferit de extremități, dintr-un segment. Ea se *descompune în cele două părți* ale ei, situate de o parte și de alta a punctului scos.

14. Noțiunea de conexiune este, în topologie, de o deosebită importanță.

O mulțime închisă și conexă se numește un *continuu*.

O mulțime deschisă și conexă se numește un *domeniu* (sau *regiune*).

Vom întrebuința foarte des noțiunea de domeniu: o funcție $f(z)$ de variabilă complexă z va fi, în general, definită într-un domeniu D, adică pentru valorile lui z reprezentate prin punctele lui D.

Închiderea $\overline{D}$ a unui domeniu D se obține adăugînd lui D frontiera lui (frontieră care, D fiind o mulțime deschisă, este străină de D). Se numește *domeniu închis* mulțimea $\overline{D}$ astfel obținută.

Un domeniu închis nu mai este o mulțime deschisă, ci o mulțime închisă. Trebuie să observăm însă că frontiera lui $\overline{D}$ nu se confundă întotdeauna cu frontiera lui D, ci ea poate constitui, în unele cazuri, numai o parte din frontiera acestuia din urmă. De exemplu, domeniul format de interiorul cercului plin $|z| \leqslant 1$, mai puțin raza $0 \leqslant x \leqslant 1$, are ca frontieră $|z| = 1$ plus raza scoasă din cercul plin; dar inchiderea sa este cercul plin $|z| \leqslant 1$, care are ca frontieră circumferința singură. Partea din frontiera unui domeniu D care nu intră în frontiera lui $\overline{D}$ se numește *frontieră interioară* a lui D.

O b s e r v a ț i e. Noțiunea de conexitate se poate prezenta și sub o formă puțin diferită de cea de mai sus, o formă intrinsecă. Să considerăm o mulțime oarecare A în plan. Mulțimea A poate fi privită, ea însăși, ca un spațiu (subspațiu al planului în care se află așezată), dacă definim noțiunile topologice fundamentale în A, *fără a face uz de punctele străine de* A. Să considerăm numai submulțimile B ale lui A și să definim vecinătățile punctelor lui B în A, mulțimile B închise (sau deschise) în A etc.

O vecinătate în A a unui punct $a \in A$ va fi, prin definiție, mulțimea punctelor din A, care satisfac inegalitatea

$$|z - a| < r, \quad r > 0.$$

* Suma unui număr finit de segmente puse cap la cap.

Adică, o vecinătate a lui $a \in A$ în A va fi intersecția cu A a unei vecinătăți a lui a din plan. Un punct *de acumulare al lui B în A* va fi un punct $\beta \in A$, care este punct de acumulare al lui B. Tot astfel se definesc mulțimile B închise în A, mulțimile deschise în A* și toate noțiunile introduse mai sus relative la plan se traduc prin noțiunile analoge relative la A, care joacă rol de spațiu. Topologia aceasta a lui A (în care nu intervine nici un punct din plan care nu este în A) se numește topologia *indusă* pe A de topologia planului din care face parte A.

Conexiunea lui A se poate atunci defini în modul următor: A este conex dacă nu există în A nici o submulțime (în afară de A însuși și de mulțimea 0) care să fie, deodată, închisă și deschisă în A.

După cum se vede, această proprietate a planului, pe care am semnalat-o în § 11, de a nu poseda nici o submulțime deodată închisă și deschisă (în afară de însuși planul și mulțimea 0) este echivalentă cu afirmația că planul este conex.

Pentru un spațiu oarecare S, noțiunea de conexiune poate fi, așadar, definită în mod *intrinsec*, fără a considera pe S scufundat în alt spațiu, ci făcînd uz numai de elementele lui S.

15. Demonstrațiile de conexiune, date în § 13 pentru cîteva cazuri simple, conduc în mod firesc la următorul criteriu de conexiune *pentru mulțimile deschise*:

Condiția necesară și suficientă pentru ca mulțimea deschisă G să fie conexă (adică să fie un *domeniu*) *este ca, oricare ar fi două puncte date ale lui G, acestea să poată fi unite între ele printr-o linie poligonală în întregime așezată în G.*

Condiția este necesară.

Fie g un punct oarecare din G.

Mulțimea H, formată din punctele lui G care se pot uni — în condițiile din enunțul de mai sus — cu g, cuprinde cu siguranță o întreagă vecinătate a lui g, deoarece g este punct interior al lui G, acesta fiind mulțime deschisă, iar orice punct al unei vecinătăți se poate evident uni cu centrul ei, chiar printr-un singur segment de dreaptă. Cum același lucru se poate afirma pentru orice punct din H, acesta este mulțime deschisă. Dar tot mulțime deschisă este și H_0, complementul lui H față de G, deoarece, dacă un punct g_0 face parte din H_0, împreună cu g_0 face parte din H_0 și o întreagă vecinătate a lui g_0, acesta fiind tot punct interior al lui G. Dar H și H_0 fiind mulțimi deschise, nici una dintre ele nu poate cuprinde vreun punct de acumulare al celeilalte decît dacă $H \cdot H_0 \neq 0$. Or, prin definiția lui H_0, avem $H \cdot H_0 = 0$. Cum punctul $g \in H$, și deci $H \neq 0$, conexitatea lui G ne duce la concluzia că $H_0 = 0$ și deci că orice punct din G este în H și, ca atare, poate fi unit cu g printr-o linie poligonală așezată în G.

Condiția este suficientă.

Într-adevăr, dacă orice punct $g' \in G$ se poate uni cu $g \in G$, atunci pentru linia poligonală gg', care este cuprinsă în G, se poate repeta raționamentul făcut mai sus pentru segment, cum am observat și în § 13. Deci G este conex.

---

* Prin complementul lui B se va înțelege, bineînțeles, aici, complementul față de A, care joacă rolul planului întreg.

În aplicații, criteriul acesta pentru conexiunea mulțimilor deschise este foarte util. În cazul general, el reprezintă numai o condiție suficientă. Exemple simple arată că o mulțime A (și chiar un continuu) poate fi conexă fără ca două din punctele ei să se poată uni prin linii poligonale situate în mulțimea A. Există chiar continuuri în care două puncte nu pot fi unite astfel nici printr-un «drum continuu oarecare», noțiune pe care o vom preciza în secțiunea următoare.

III. TRANSFORMĂRI CONTINUE ȘI TRANSFORMĂRI TOPOLOGICE

16. Să considerăm acum două plane (z) și (u), în care punctele reprezintă, respectiv, valorile numerelor complexe z și u și o funcție $u = f(z)$ care face să corespundă unei valori z din planul (z) o valoare bine determinată u din planul (u). O asemenea funcție de variabilă complexă revine (a se vedea *Introducerea*) la două funcții s și t de cele două variabile reale x și y, dacă scriem $z = x + iy$ și $u = s + it$. Adică $u = f(z)$ revine la transformarea definită prin

$$\left.\begin{aligned} s &= s(x, y) \\ t &= t(x, y) \end{aligned}\right\} \quad u = f(z).$$

Vom întrebuința deci, indiferent, expresiile de *funcție* sau *transformare* pentru $u = f(z)$. Transformarea $u = f(z)$ poate fi definită numai pe o anumită mulțime A din planul (z), pe care o transformă atunci într-o mulțime B din planul (u). Mulțimea B se numește *imaginea* lui A prin $u = f(z)$, fiecare punct din B fiind imaginea punctului (sau punctelor) din A, căruia îi corespunde prin $u = f(z)$.

Transformarea $u = f(z)$ este *continuă* în $z = a \in A$, dacă, oricare ar fi vecinătatea W_b a punctului $u = b = f(a)$, există o vecinătate V_a a lui a astfel ca, dacă $z \in V_a$, să avem

$$f(z) = u \in W_b.$$

Dacă $u = f(z)$ este continuă în orice punct al lui A, se spune că $f(z)$ *este continuă pe* A. Se vede îndată că aceste definiții revin la definiția obișnuită a continuității transformării de mai sus.

O transformare $u = f(z)$ se numește *biunivocă* dacă, tot astfel după cum a nu are decît o singură imagine b, și fiecare punct $b \in B$ nu este imagine decît a unui singur punct $a \in A$.

O transformare $u = f(z)$ biunivocă are o transformare *inversă*, care se înseamnă $z = f^{-1}(u)$ și care transformă și ea în mod biunivoc mulțimea B în mulțimea A*.

Dacă o transformare este biunivocă și *bicontinuă* (adică dacă este continuă și transformarea și inversa ei), ea se numește *transformare topologică*. O transformare topologică este deci o transformare continuă de un tip particular.

* În general, B fiind imaginea lui A prin $u = f(z)$, se înseamnă prin $f^{-1}(B_1)$ mulțimea punctelor $a \in A$ a căror imagine este în $B_1 \subset B$.

17. Fie F o mulțime închisă din (z) și Φ imaginea ei în (u) printr-o transformare continuă. Dacă mulțimea F nu este mărginită, Φ poate să nu mai fie o mulțime închisă în (u). De exemplu, dacă A este mulțimea $[x \geqslant 0,\ y=0]$, iar transformarea este definită prin

$$s = y$$
$$t = \frac{1}{1+x},$$

imaginea lui A în planul (u) este mulțimea $(s = 0,\ 0 < t \leqslant 1)$, care nu este închisă. Avem însă următoarea teoremă:

T e o r e m ă. *Dacă A este o mulțime compactă (adică dacă A este o mulțime închisă și mărginită) imaginea ei B prin orice transformare continuă pe A este tot o mulțime compactă.*

Să arătăm mai întîi că imaginea B este mărginită.

Fie $u = f(z)$ o transformare continuă pe A. În $z = a \in A$, f fiind continuă, iar k fiind un număr pozitiv dat, pentru vecinătatea W_b definită prin

$$|u - b| < k \quad [b = f(a)],$$

avem o vecinătate V_a^k definită prin

$$|z - a| < h(a, k),$$

astfel că, dacă z este în V_a^k, $u = f(z)$ este în W_b.

Pentru fiecare punct $a \in A$, putem găsi o astfel de vecinătate. Presupunînd pe k fix, h va depinde de a și de k; de aceea însemnăm această vecinătate prin V_a^k. Vecinătățile V_a^k acoperă mulțimea A care este compactă.

După teorema Borel-Lebesgue, putem alege o acoperire finită al lui A cu vecinătăți V_a^k; fie

$$V_{a_1}^k,\ V_{a_2}^k, \ldots, V_{a_m}^k.$$

Cum orice punct $a \in A$ este în una din aceste m vecinătăți cel puțin, orice punct $b \in B$ va fi în una din vecinătățile

$$W_{b_1},\ W_{b_2},\ \ldots,\ W_{b_m},$$

definite prin

$$|u - b_j| < k \quad (j = 1,2, \ldots, m).$$

Or, acestea sînt în număr finit și pot fi deci toate cuprinse într-un cerc destul de mare din planul (u). Deci B este mărginit. Rămîne să arătăm că B este închis. Dacă nu ar fi așa, ar exista atunci un punct $b' \in B'$ străin de B. Fie atunci (b_n), $n = 1,2, \ldots$, un șir de puncte din B tinzînd către b'. Printre punctele a care au ca imagine b_n să alegem unul a_n, și să facem același lucru pentru fiecare n. Punctele b fiind distincte și punctele a_n sînt distincte. Sînt deci o infinitate de a_n ca și de b_n. Aceste puncte a_n au un punct de acumulare, întrucît A este mulțime mărginită și acest punct de acumulare fie α *este în* A întrucît A este mulțime închisă. Fie atunci $\beta = f(\alpha)$ cu

$\beta \in B$. Cum f este continuă în $z = \alpha$, orice șir extras din (a_n) care tinde către α trebuie să aibă ca imagine un șir tinzînd către β. Or, acest șir imagine nu poate fi decît un subșir al lui (b_n), deci el nu poate tinde decît către b'. Deci $b' = \beta \in B$. Imaginea B este deci mărginită și închisă, adică este compactă.

18. Orice transformare biunivocă și continuă a unei mulțimi compacte are ca transformare inversă tot o transformare continuă; *ea este deci topologică.*

Fie A o mulțime compactă și $\mathfrak{T}$ o transformare continuă a lui A în B. Conform paragrafului precedent, B este atunci tot compactă. Conform enunțului, $\mathfrak{T}$ este biunivocă, adică nu există două puncte distincte a_1 și a_2 în A cu aceeași imagine în B.

Trebuie arătat că $\mathfrak{T}$ este continuă și de la B la A. Dacă nu ar fi astfel, ar exista un punct $b \in B$ și un șir de puncte $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ în B tinzînd către b, pentru care $a_n = \mathfrak{T}^{-1}(b_n)$ *nu* ar tinde către $a = \mathfrak{T}^{-1}(b)$. Aceasta înseamnă că șirul (a_n) ar avea cel puțin un alt punct de acumulare $\alpha \neq a$. Cum A este compactă, acest punct de acumulare este în A. Dar din cauza continuității transformării $\mathfrak{T}$ de la A la B, avem $\mathfrak{T}(\alpha) = b$. Cum $\mathfrak{T}$ este biunivocă, nu putem avea deci $\alpha \neq a$ și $\mathfrak{T}^{-1}$ nu poate fi discontinuă în $b \in B$.

Este important de observat că această proprietate *nu* mai are loc dacă mulțimea A nu este închisă (sau mărginită), adică dacă nu este compactă.

Să considerăm, de exemplu, intervalul deschis σ de pe axa reală a planului (z), definit prin $|x| < 1$, și imaginea sa σ' din planul (z') prin transformarea

$$z' = 1 + ix \text{ pentru } -1 < x \leqslant 0$$

$$z' = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1.$$

Transformarea este biunivocă și continuă de la σ la σ'. Transformarea inversă de la σ' la σ este însă discontinuă în punctul $z' = 1$.

19. *Dacă A este mulțime conexă, imaginea ei B prin orice transformare continuă f este conexă.*

Într-adevăr, dacă am avea $B = B_1 + B_2$, $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ cu $B_1 B_2 = 0$ și $B_1' B_2 = 0$, $B_1 B_2' = 0$, am avea aceleași condiții pentru $A_1 = f^{-1}(B_1)$ și $A_2 = f^{-1}(B_2)$ în A, din cauza continuității lui f în orice $a \in A$. Or, aceasta ar însemna că A nu este conex, contrar ipotezei.

20. Am văzut că, pe cînd mulțimile închise nu au ca imagini continue în mod obligator mulțimi închise, mulțimile compacte au prin transformările continue întotdeauna ca imagini mulțimi compacte. Se spune, de aceea, că acestea din urmă sînt un *invariant continuu*. Mulțimile închise (ca și cele deschise) nu sînt invarianți continui. Conexiunea este, după teorema precedentă, un invariant continuu.

Anumite noțiuni care nu sînt invarianți continui, pot fi însă *invarianți față de anumite clase particulare de transformări continue*. De exemplu, dacă ne mărginim la transformările de forma

$$u = P(z),$$

în care $P(z)$ este un polinom în z, atît mulțimile închise, cît și cele deschise, sînt invarianți față de această clasă de transformări continue. Sînt alte transformări care lasă invariante mulțimile deschise, dar nu pe cele închise, cum vom avea ocazia să constatăm mai departe.

21. O imagine continuă a unui segment de dreaptă se numește un *drum continuu*, dacă o considerăm însoțită de corespondența pe care transformarea o stabilește de la punctele segmentului la această imagine. Punctele care sînt imaginile extremităților segmentului se numesc *extremitățile* drumului continuu.

După cum se vede, un drum continuu în (z) nu este deci numai mulțimea descrisă de punctul de coordonate (x,y) legate între ele printr-un parametru t, care ia, de exemplu, valori de la 0 la 1, ci implică, în plus, o anumită ordine a punctelor acestei mulțimi, determinată de valorile crescătoare ale lui t. Aceeași mulțime de puncte descrisă în altă ordine constituie un alt drum continuu.

Mulțimea imagine a segmentului de dreaptă, considerată independent de o ordine a punctelor sale, este un continuu [în sensul din § 14] de un tip special, numit continuu peanian*. Nu trebuie confundat un *drum* continuu, care descrie un astfel de continuu, cu acest continuu însuși.

Dimpotrivă, imaginea singură a segmentului (0, 1) obținută printr-o *transformare topologică* se numește *arc simplu* (sau *arc jordanian***). Extremitățile segmentului au ca imagini *extremitățile arcului*.

Tot astfel, imaginea topologică (adică obținută printr-o transformare topologică) a unei circumferințe se numește o *curbă simplă închisă* (sau *curbă jordaniană*). Vom da îndată o proprietate importantă a acestor curbe, cunoscută sub numele de teorema lui Jordan.

Să observăm că *drumul continuu este un invariant continuu în sensul de la* § 20, pe cînd arcul simplu sau curba simplă închisă jordaniană nu sînt invarianți continui.

Dar *atît arcul simplu cît și curba simplă închisă sînt invarianți față de transformările topologice*, clasă particulară a transformărilor continue.

O b s e r v a ț i e. Din rezultatul de la § 13 și din teorema din § 19 se deduce îndată că mulțimea formată de un drum continuu (deci și un arc simplu) este o mulțime conexă.

22. Să considerăm o transformare topologică oarecare $u = T(z)$ a planului (z) în planul (u). Înțelegem prin aceasta că imaginea planului (z) prin T este planul (u) întreg.

Față de o asemenea transformare, toate noțiunile pe care le-am introdus aici, relative la mulțimile de puncte în plan, sînt invariante, afară de aceea de vecinătate, în sensul în care am definit-o mai sus cu ajutorul unei inegalități numerice***.

---

* De la așa-zisele «curbe Peano», care umplu o arie. Un continuu *peanian* este caracterizat prin importanta noțiune topologică de *conexiune locală*.

** După C. J o r d a n, care a pus cel dintîi în evidență însemnătatea acestei noțiuni generale.

*** Planul fiindu-ne *dat* aici ca o mulțime a numerelor complexe, este firesc ca prima noțiune relativă la acest plan să fie definită cu ajutorul acestor numere. Într-o expunere abstractă a topologiei planului, nu numai noțiunea de vecinătate, dar chiar însuși planul trebuie definite axiomatic.

Aceasta se poate constata cu ușurință observînd că orice punct de acumulare al unei mulțimi A din (z) are ca imagine un punct de acumulare al mulțimii $B = T(A)$ din (u) și reciproc. Mulțimile închise rămîn deci invariante ca și mulțimile deschise și, cu acestea, toate celelalte noțiuni. Pentru acest motiv, ele se numesc noțiuni topologice ale planului. Topologia planului se ocupă exclusiv cu asemenea noțiuni*.

Se demonstrează în topologia planului următoarea teoremă a lui Antoine relativă la curbele simple închise (jordaniene), teoremă avînd importante consecințe, dintre care unele vor fi folosite mai departe.

T e o r e m ă. *Dată fiind în planul* (z) *o circumferință* Γ *și o transformare topologică* $\mathfrak{T}$ *a acesteia în curba simplă închisă* C *din planul* (u), *transformarea* $\mathfrak{T}$ *se poate extinde într-o transformare topologică* T *a planului* (z) *în planul* (u).

Se înțelege prin aceasta că există o transformare topologică T a lui (z) în (u) care, pe Γ, *se confundă cu transformarea* $\mathfrak{T}$ *a lui* Γ *în* C.

Din această teoremă — a cărei demonstrare necesită considerații speciale ce nu-și pot găsi locul aici — rezultă, între altele, și următoarea teoremă a lui Jordan asupra curbelor simple închise:

O curbă simplă închisă împarte planul în două domenii (adică complementul ei față de plan este format din două domenii fără punct comun). *Ea este frontiera comună a acestor domenii* (adică fiecare punct al ei este punct frontieră pentru fiecare din aceste domenii și ele nu mai au alte puncte frontieră).

Teorema aceasta, care de altfel se demonstrează și direct, este cu mult anterioară celei enunțate mai sus. Ea a fost demonstrată cel dintîi de C. J o r d a n, iar de atunci s-au dat numeroase alte demonstrații, în cea mai mare parte directe**.

Teorema lui Jordan este de o mare importanță nu numai în topologie, dar și în analiză. Dacă am dat mai sus enunțul teoremei generale din care ea se poate deduce, este pentru a putea trage din această teoremă și alte consecințe care ne vor fi utile.

Teorema enunțată mai sus (care de multe ori se demonstrează folosind teorema lui Jordan) poate fi stabilită și direct***. Ea ne permite să reducem toate chestiunile topologice relative la curbele simple închise jordaniene, la cazul cercului, și deci la demonstrații elementare.

23. Compactificarea planului lui Gauss-Cauchy. Punctul de la infinit. Planul lui Gauss-Cauchy constituie o reprezentare comodă a mulțimii numerelor complexe, în care se pot ușor interpreta geometric operațiile elementare efectuate între acestea. Sînt însă numeroase chestiuni în care o reprezentare a planului pe sferă — și cu el o reprezentare a numerelor complexe pe aceasta

* Nu trebuie confundată această invarianță a noțiunilor topologice ale planului față de transformările planului *întreg în el însuși* cu invarianții topologici sau continui față de transformări *definite numai pe acele mulțimi*, invarianți menționați în paragrafele precedente și care pot fi numiți invarianți topologici *absoluți*.

** A se vedea de exemplu demonstrația recentă cu caracter elementar dată de A. I. V o l p e r t în „Uspehi matematiceskih nauk", 1950, p. 168. În același volum la p. 173 o altă demonstrație a aceleiași teoreme, de A. F. F i l i p p o v.

*** L. A n t o i n e, „ Journal de Mathématiques pures et appliquées", 1921, seria 8, t. 4, p. 221. Altă demonstrație în G. N ö b e l i n g, „Journal für reine und angew. Mathematik". 1950. t. 118.

— prezintă importante avantaje și permite să se introducă mai multă simetrie în raționamente, ca și în formularea unor rezultate.

Reprezentarea aceasta se face în modul cel mai simplu prin așa-numita proiecție stereografică (care prezintă și interesul că păstrează valoarea unghiurilor, ceea ce pentru noi — după cum vom vedea — va fi de o deosebită importanță).

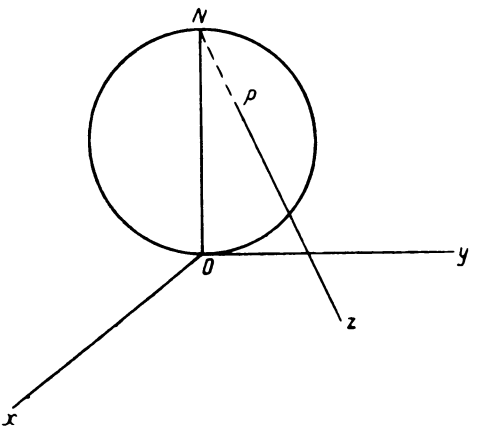


Fig. 2

Să considerăm o sferă tangentă în $z = 0$ (adică în punctul O) la planul (z), (planul xoy) și fie N extremitatea cealaltă a diametrului trecînd prin O. Orice punct z din plan va fi proiectat într-un punct P de pe sferă prin intersecția sferei cu dreapta Nz. Astfel, fiecărui punct z din plan îi va corespunde un punct P de pe sferă, și reciproc, fiecărui punct de pe sferă, *diferit de* N, îi va corespunde un punct din plan. Cum această corespondență este biunivocă și continuă (în ambele sensuri) și cum unui P care tinde către N, îi corespunde un z care «tinde către ∞», vom conveni să adăugăm planului un punct fictiv: *punctul de la infinit* (notat $z = \infty$), pe care-l considerăm corespondentul lui N de pe sferă*.

Toate noțiunile definite pentru punctele planului, în topologia acestuia, se transformă ușor pe sferă. Aici punctul N nu mai este însă prin nimic distinct de celelalte puncte. Această observație ne permite să extindem toate aceste noțiuni și la «punctul de la infinit» al planului.

Astfel, vom numi *vecinătate a punctului* $z = \infty$, mulțimea de puncte z definită prin

$$|z| > r \qquad (r > 0),$$

adică exteriorul unui cerc oarecare cu centrul în $z = 0$.

După această definiție — și păstrînd definiția punctului de acumulare, dată mai sus — orice mulțime nemărginită are punctul $z = \infty$ ca punct de acumulare, și reciproc, orice mulțime care are pe $z = \infty$ ca punct de acumulare este nemărginită.

---

* Să observăm că corespondența biunivocă și bicontinuă (deci topologică) între planul lui Gauss-Cauchy astfel completat prin punctul ∞ și sferă (numită și sfera lui Riemann), corespondență definită prin proiecția indicată mai sus (*proiecția stereografică*), păstrează valoarea unghiurilor, adică unui unghi format de două arce de curbă în plan îi corespunde un unghi de aceeași valoare pe sferă, și reciproc. De asemenea, cercurile și dreptele din plan au, pe sferă, imagini care sînt întotdeauna cercuri, și reciproc (acestea se demonstrează în geometria elementară).

Cu introducerea punctului $z = \infty$, teorema lui Weierstrass-Bolzano devine deci: orice mulțime infinită are cel puțin un punct de acumulare, ceea ce este, de altfel, echivalentul acestei teoreme pe sferă. În general, orice noțiune sau proprietate topologică pe sferă se traduce, prin proiecția indicată, pe planul completat cu punctul de la infinit, și reciproc. Planul astfel «compactificat» (deoarece el capătă proprietățile unei mulțimi compacte ca și sfera) este deci topologic echivalent cu sfera; el nu este decît o altă reprezentare a uneia și aceleiași entități topologice.

Se întrebuințează adesea denumirea de *sfera lui Riemann* sau *planul complet*. I se mai spune uneori «planul complex» pentru a-l distinge de «planul euclidian».

Încheiem aici aceste considerații generale de topologia planului, rămînînd să le completăm pe măsura necesităților ce se vor prezenta.

CAPITOLUL II

FUNCȚII ANALITICE ÎNTR-UN DOMENIU

I. SERII DE PUTERI

1. Seriile de puteri întregi și pozitive ale variabilei (numite și serii întregi) constituie baza, așa-zisă elementară, a teoriei funcțiilor analitice. O asemenea serie are forma

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{1}$$

pe care o vom scrie prescurtat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ și în care c_n sînt constante complexe oarecare.

Prima problemă care se pune în legătură cu seria (1) este cercetarea mulțimii ei de convergență, adică a mulțimii punctelor z pentru care o astfel de serie este convergentă.

Următoarea teoremă clasică, datorită lui N. H. A b e l, dă răspunsul general în ceea ce privește configurația acestei mulțimi.

T e o r e m ă. *Orice serie de puteri* (1) *are un cerc de convergență cu centrul în* $z = 0$, *raza* R *a acestui cerc depinzînd numai de coeficienții* c_n *ai seriei. În punctele interioare ale acestui cerc* ($|z| < R$) *seria este absolut convergentă; în punctele exterioare* ($|z| > R$) *ea este divergentă.*

În plus, *în orice cerc plin* $|z| \leqslant r < R$, *seria este uniform convergentă.*

Să observăm că $z = 0$ este întotdeauna punct de convergență pentru (1). Dacă nu există alt punct de convergență, avem $R = 0$ și teorema este evidentă în acest caz, lipsit de altfel de interes pentru noi.

Să presupunem deci că există un punct de convergență $z = z_0 \neq 0$. Putem lua atunci un număr fix M astfel încît, pentru orice n, să avem

$$|c_n z_0^n| < M$$

și deci

$$|c_n| < \frac{M}{|z_0|^n}. \tag{2}$$

Să considerăm seria

$$M + \frac{M}{|z_0|} z + \frac{M}{|z_0|^2} z^2 + \ldots + \frac{M}{|z_0|^n} z^n + \ldots \tag{3}$$

În baza relațiilor (2), seria (3) este o serie *majorantă* pentru (1). Dar (3) este absolut convergentă pentru orice z care satisface inegalitatea

$$|z| < |z_0|.$$

Deci, dacă (1) este convergentă pentru $z = z_0 \neq 0$, ea este *absolut convergentă* pentru orice z de modul inferior lui $|z_0|$.

O dată acest rezultat obținut, să considerăm pe axa reală pozitivă a planului (z) punctele de convergență ale seriei (1). Ele formează o mulțime care este sau o semidreaptă întreagă, sau un segment finit cu o extremitate în O și cealaltă într-un punct $z = R > 0$ de pe axa reală (punct care poate fi de convergență el însuși, sau nu).

Într-adevăr, din cele ce am văzut, un punct fix x_1 de pe axa reală nu poate face parte din mulțimea de convergență dacă între O și x_1 ar exista un punct de divergență. Numărul R (care în primul caz este ∞, iar în al doilea un număr pozitiv finit) este *raza de convergență* de care vorbește enunțul teoremei.

Într-adevăr, oricare ar fi z_1 în plan, astfel ca

$$|z_1| < R,$$

seria (1) va trebui să fie absolut convergentă, deoarece există atunci pe axa reală pozitivă un punct x_1 astfel încît

$$|z_1| < x_1 < R$$

și deci, după rezultatul obținut mai sus, în $z = z_1$, seria (1) este convergentă absolut. Tot astfel, în orice punct z_2, din planul (z), pentru care avem

$$|z_2| > R, \tag{4}$$

seria (1) este divergentă.

Într-adevăr, după același rezultat ar trebui, dacă această serie ar fi convergentă în z_2, să fie convergentă și în orice punct x_2 de pe axa reală pozitivă care satisface inegalitatea

$$x_2 < |z_2|.$$

Or, x_2 se poate alege astfel încît această inegalitate să fie satisfăcută și să avem totuși

$$x_2 > R,$$

din cauza lui (4). Deci, R este raza de convergență a lui (1) în sensul precizat în enunțul teoremei.

Să trecem acum la a doua parte a teoremei.

Fie r un număr real pozitiv $< R$.

În $z = r$ seria este absolut convergentă, adică seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \tag{5}$$

este convergentă. Dar avem, evident, pentru orice z care este în cercul plin

$$|z| \leqslant r, \tag{6}$$

inegalitatea

$$|c_n|\,|z|^n \leqslant |c_n|\,r^n.$$

De aici rezultă că în cercul (6) (cercul împreună cu circumferința sa) (1) este *uniform* convergentă, pentru că termenii seriei (5) sînt *independenți* de z.

Teorema este astfel complet demonstrată.

O b s e r v a ț i a 1. Să observăm că în enunțul teoremei nu este vorba de punctele de pe *circumferința* cercului de convergență. De fapt, pentru aceste puncte nu se poate afirma nimic general valabil pentru *orice* serie (1). Pe circumferința cercului de convergență pot exista puncte de convergență absolută, de convergență simplă sau de divergență.

De exemplu, seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, pentru care $R = 1$, prezintă toate aceste cazuri în $z = \pm 1$.

O b s e r v a ț i a. 2. Raza de convergență poate fi efectiv egală cu 0, cu un număr > 0 finit, sau cu ∞.

Exemple:

În seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^n$$

avem $R = 0$ (orice punct în afară de $z = 0$ este de divergență).

În seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

avem $R = 1$.

În seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

avem $R = \infty$ (orice punct din plan este de convergență).

2. Am spus că teorema de mai sus, datorită lui A b e l, dă răspuns problemei privitoare la natura mulțimii de convergență pentru seriile (1) în ceea ce privește configurația acestei mulțimi.

Teorema următoare, datorită lui A. L. C a u c h y (regăsită și pusă în valoare de J. H a d a m a r d), completează rezultatul de mai sus, dînd o relație între șirul coeficienților c_n și raza R.

T e o r e m ă. *Raza de convergență R a seriei*

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{1}$$

este egală cu $\frac{1}{\omega}$, *unde avem*

$$\omega = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Numerele $\sqrt[n]{|c_n|}$ sînt toate reale și $\geqslant 0$, prin rădăcină trebuind întotdeauna înțeles rădăcina aritmetică (adică reală și pozitivă). Avem deci întotdeauna $\omega \geqslant 0$.

Fie $\varepsilon > 0$ oarecare dat. Există un număr N astfel încît, dacă $n > N$, avem

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \omega + \varepsilon$$

și deci seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\omega + \varepsilon)^n z^n$$

este majorantă pentru (1), de la $n > N$ înainte și, cum ea este convergentă pentru $|z| < \frac{1}{\omega + \varepsilon}$, seria (1) este absolut convergentă pentru orice $|z| < \frac{1}{\omega + \varepsilon}$. Dar ε este pozitiv arbitrar, deci (1) este absolut convergentă pentru orice $|z| < \frac{1}{\omega}$. Prin urmare, $R \geqslant \frac{1}{\omega}$.

Dar, ω fiind limita superioară a șirului $\sqrt[n]{|c_n|}$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, pentru un anumit șir de valori $n_1, n_2, \ldots$ crescînd la infinit, avem inegalitatea

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \omega - \varepsilon.$$

De unde, pentru aceste valori ale lui n,

$$|c_n| > (\omega - \varepsilon)^n$$

și deci, pentru

$$|z| > \frac{1}{\omega - \varepsilon}, \tag{7}$$

inegalitatea

$$|c_n z^n| > 1.$$

Or, aceasta arată că, pentru valorile z satisfăcînd pe (7), seria (1) nu poate fi convergentă. Cum ε este pozitiv arbitrar, se vede că $R \leqslant \frac{1}{\omega}$, deci $R = \frac{1}{\omega}$.

3. Din cele arătate pînă aici rezultă că seriile (1) definesc, prin suma lor, funcții $S(z)$ *bine determinate și continue în* $|z| < R$. Într-adevăr, convergența fiind uniformă în $|z| \leqslant r$ (oricare ar fi $r < R$), se vede că $S(z)$ este continuă în $|z| < R$.*

După cum am observat în § 1, teorema de mai sus datorită lui A b e l nu poate da nici o informație asupra comportării seriei de puteri pe circumferința cercului ei de convergență, pe această circumferință putîndu-se

* A se vedea *Introducerea*, § 3.

prezenta diverse cazuri. Vom da acum o a doua teoremă a lui A b e l (numită și «teorema continuității pe circumferință»), care privește punctele de convergență (absolută sau simplă) de pe circumferința cercului de convergență.

T e o r e m a l u i A b e l. Fie α un punct de pe circumferința cercului de convergență al seriei

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{1}$$

punct în care seria (1) este presupusă încă convergentă, și fie S suma ei pentru $z = \alpha$. Vom arăta că, în aceste condiții, dacă z tinde către α pe un drum λ, interior cercului de convergență și *netangent* * *la acest cerc în* $z = \alpha$, *atunci suma seriei* (1) *tinde către* S.

Este clar că putem presupune raza cercului de convergență $= 1$ și $\alpha = +1$; este suficient, într-adevăr, pentru ca să reducem chestiunea la acest caz, să înlocuim pe z în (1) cu αz, ceea ce evident nu schimbă nimic din condițiile seriei (1).

Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

este deci convergentă (după această schimbare de variabilă) și avem, prin urmare, posibilitatea de a alege pe n destul de mare pentru ca sumele succesive

$$\begin{aligned} S_0 &= c_n \\ S_1 &= c_n + c_{n+1} \\ S_2 &= c_n + c_{n+1} + c_{n+2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_p &= c_n + c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} \end{aligned}$$

să fie, fiecare, în modul, inferioară lui ε, număr pozitiv dat arbitrar. Cu ajutorul acestor sume putem scrie după cum urmează, pentru $|z| < 1$, egalitatea

$$c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots + c_{n+p} z^{n+p} = S_0 z^n + (S_1 - S_0) z^{n+1} + \ldots +$$

$$+ (S_p - S_{p-1}) z^{n+p} = z^n (1 - z)(S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \ldots + S_{p-1} z^{p-1}) + S_p z^{n+p}.$$

Fie

$$|z| = r \text{ și } |1 - z| = \rho.$$

Cum $r < 1$, din egalitatea de mai sus se deduce

$$|c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots + c_{n+p} z^{n+p}| < \rho\varepsilon \frac{1 - r^p}{1 - r} + \varepsilon < \varepsilon \left[\frac{\rho}{1 - r} + 1 \right].$$

* Se zice că λ este *netangent* în α la cerc, dacă λ rămîne, în vecinătatea lui α, cuprins într-un unghi $< \pi$ cu vîrful în α și avînd ca bisectoare raza $O\alpha$.

Fie θ unghiul pe care-l face dreapta care trece prin punctele z și 1 cu tangenta la cerc dusă în punctul unde acesta este întîlnit de raza Oz. Avem atunci, cum se constată cu ușurință din figura 3,

$$\frac{\rho}{1-r} < \frac{1}{\sin\theta}.$$

Cînd z tinde însă pe λ către 1, cum λ este netangent la cerc în acest punct, $\sin\theta$ rămîne superior unei constante $\frac{1}{k} > 0$. Așadar, pentru z pe λ, în vecinătatea punctului 1, avem:

$$|c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots + c_{n+p} z^{n+p}| < \varepsilon (k+1).$$

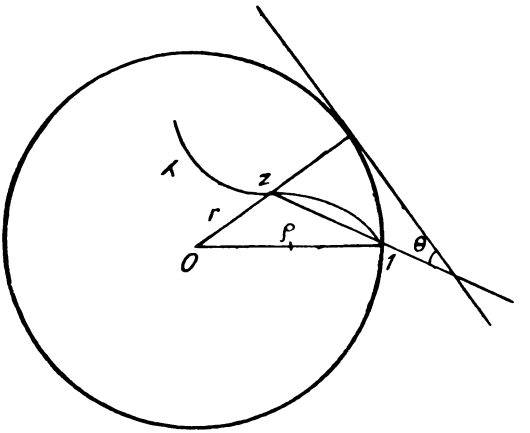


Fig. 3

Prin urmare, seria (1) este *uniform convergentă pe* λ, inclusiv extremitatea $z = 1$ (pentru că inegalitatea precedentă are loc și în $z = 1$, așa după cum a fost luat n, iar ε este un număr > 0 arbitrar). Deci, funcția reprezentată de (1) *este continuă pe* λ *inclusiv* $z = 1$; ea are deci în $z = 1$ valoarea limită către care tinde cînd $z \to 1$ pe λ. Teorema este astfel demonstrată.

4. Ca aplicație să considerăm seria

$$1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n} z^n + \ldots,$$

unde α este un număr real pozitiv.

Raza de convergență a acestei serii este 1, după cum arată îndată raportul coeficienților a doi termeni consecutivi. Vom arăta că seria este convergentă (și chiar absolut convergentă)și în punctele $z = \pm 1$ de pe circumferința cercului de convergență, adică seria numerică cu termeni pozitivi

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{1\cdot 2\ldots n} \right| \frac{1}{n+1}$$

este convergentă.

Avem, într-adevăr, presupunînd $\alpha < 1$,

$$u_n = \left| \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{1\cdot 2\ldots n} \right| = \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\ldots\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right),$$

deci

$$u_n = e^{\ln\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)+\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)} =$$

$$= e^{-\alpha\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\frac{\alpha^2}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}-\ldots-\frac{\alpha^m}{m}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^m}-\ldots}$$

ținînd seama de dezvoltarea în serie de puteri ale lui α, valabilă în intervalul $-1 < \alpha < +1$, a logaritmilor de la exponent.

De aici se deduce

$$u_n < e^{-\alpha\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}} = e^{-\alpha(\ln n + C_n)}$$

unde $\lim_{n\to\infty} C_n = C$ = constanta lui Euler.

Prin urmare,

$$0 < u_n < k\frac{1}{n^\alpha},$$

k fiind o cantitate pozitivă fixă convenabil aleasă.

Rezultă de aici convergența absolută a seriei date pentru $\alpha < 1$.

Dacă $\alpha > 1$, demonstrația rămîne valabilă luînd, în loc de u_n de mai sus, expresia analogă în care am lăsat la o parte un număr finit de factori la numărător și numitor, număr care nu depinde decît de α.

Deci, după teorema lui Abel, demonstrată în paragraful precedent, funcția reprezentată prin seria dată este continuă în $z = \pm 1$.

Or, ea reprezintă (după cum se știe din calculul diferențial) pentru z real pe $(1+z)^\alpha$ (și anume, valoarea reală pozitivă a acestei expresii în cazul cînd α este neîntreg).

Avem deci

$$2^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots$$

și

$$0 = 1 - \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\ldots(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots$$

5. Teorema din § 3 mai duce în mod foarte simplu la demonstrarea unei teoreme cunoscute asupra seriilor numerice simplu convergente.

Se știe că dacă una din seriile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este absolut convergentă, cealaltă fiind numai convergentă, seria

$$\sum_{n=0}^{\infty}[a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0]$$

este convergentă și are ca sumă produsul celor dîntîi două serii *.

* In *Introducere* această propoziție a fost amintită sub o formă mai restrictivă, mai obișnuită în aplicații.

Teorema lui Abel ne permite să completăm acest rezultat prin următorul: dacă cele două serii de mai sus sînt ambele numai convergente, iar seria formată ca mai sus cu termenii acestora *este și ea convergentă*, atunci această din urmă serie are ca sumă produsul celor două serii dintîi.

Pentru demonstrație este suficient să considerăm seriile de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{și} \quad \sum_{n=0}^{\infty} [a_0 b_n + \ldots + a_n b_0] z^n$$

care sînt evident, toate, absolut convergente pentru $|z| < 1$ (după prima teoremă a lui Abel demonstrată în § 1). Cum ultima are ca sumă produsul celor două dintîi în orice punct z, din $|z| < 1$, iar, pe de altă parte, cum ele sînt toate convergente pentru $z = 1$, continuitatea sumelor în $z = 1$ arată că relația între ele subzistă și în acest punct.

Un exemplu de aplicație a acestei propoziții îl oferă cazul înmulțirii seriei simple convergente cunoscute $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ cu ea însăși.

Din dezvoltarea cunoscută din calculul diferențial a lui $\ln(1 + x)$ în serie de puteri în intervalul $-1 < x < +1$, se deduce de altfel, ca și în paragraful precedent, că suma seriei produs este $(\ln 2)^2$.

6. Teorema lui Abel asupra continuității unor serii de puteri pe circumferința cercului de convergență *nu admite reciprocă fără condiții suplimentare.*

Exemplul seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, a cărei rază de convergență este 1 și a cărei sumă, în $|z| < 1$, este $\frac{1}{1+z}$, arată deja că existența limitei sumei pentru $z \to 1$ nu implică convergența seriei în $z = 1$. Dar, cu *anumite condiții suplimentare* impuse coeficienților, teorema lui Abel admite reciprocă sub diverse forme. Cea mai cunoscută dintre acestea este următoarea teoremă:

T e o r e m a lui T a u b e r . *Dacă suma seriei*

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

cu raza de convergență 1, *tinde către* 0 *cînd* z *tinde* (chiar numai pe axa reală) *către* 1, *și dacă* $\lim_{n\to\infty} n\,|c_n| = 0$, *atunci seria numerică* $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$ *este convergentă și are ca sumă* 0.

Fie $S(z)$ suma seriei (1) pentru $|z| < 1$ și fie

$$S_m = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

Avem

$$S_m - S(z) = \sum_{n=1}^{m} c_n (1 - z^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^n.$$

Dacă scriem primul termen al membrului al doilea sub forma

$$\sum_{n=1}^{m} c_n(1-z)\,(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}),$$

se vede că, în $|z|<1$, el este inferior, în modul, lui

$$|1-z|\sum_{n=1}^{m} n\,|c_n|$$

și că deci avem

$$|S_m - S(z)| \leqslant |1-z|\sum_{n=1}^{m} n\,|c_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n|\,|z|^n. \tag{8}$$

Ultimul termen se poate limita superior astfel

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n|\,|z|^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} n\,|c_n|\frac{|z|^n}{n} \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_m \frac{1}{m}|z|^n \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m}\frac{1}{1-|z|}, \tag{9}$$

dacă notăm cu ε_m marginea superioară a lui $n\,|c_n|$ pentru $n>m$.

Să luăm

$$z = 1 - \frac{1}{m},$$

Din (8) și (9) se deduce atunci

$$\left|S_m - S\left(1-\frac{1}{m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} n\,|c_n| + \varepsilon_m.$$

Cum, după ipoteză, avem $\lim_{n\to\infty} n\,|c_n| = 0$, ambii termeni ai membrului al doilea tind către zero cu $\frac{1}{m}$ și deci

$$\lim_{m\to\infty}\left|S_m - S\left(1-\frac{1}{m}\right)\right| = 0.$$

Dar, tot după ipoteză,

$$\lim_{z\to 1} S(z) = 0.$$

Deci

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 0^*.$$

7. Funcțiile $S(z)$ reprezentabile prin serii de forma (1) sînt de o mare importanță din punctul de vedere pe care l-am adoptat ** și această impor-

---

* În literatura matematică modernă se obișnuiește uneori să se numească «teoreme tauberiene», diversele reciproce ale teoremei lui Abel din § 3.

** A se vedea *Introducerea*.

tanță rezultă nu numai din forma specială a seriilor (1) (care amintește forma polinomială, prelungind-o oarecum la infinit), dar și din faptul că reprezentarea funcțiilor sub această formă este *unică*, adică nu există două serii (1) diferite care să aibă ca sumă aceeași funcție $S(z)$.

Pentru a dovedi aceasta, este suficient să arătăm că o serie de puteri (1), a cărei sumă $S(z)$ este identic zero, are neapărat toți coeficienții ei nuli, deoarece diferența a două serii de puteri de forma (1) este, cum se constată imediat, o serie de același fel.

Fie deci

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \equiv 0.$$

Cum pentru $z = 0$ primul membru al acestei egalități este c_0, trebuie să avem $c_0 = 0$ și deci identitatea se poate scrie

$$z[c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \ldots + c_n z^{n-1} + \ldots] \equiv 0.$$

Seria din paranteză trebuie deci să fie zero pentru orice $z \neq 0$. Dar ea este o serie de puteri (1) și deci reprezintă o funcție continuă și în $z = 0$. Ea trebuie să fie deci zero și în origine și deci $c_1 = 0$.

Continuînd astfel se obține, pe rînd, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$,...

Reprezentarea prin (1) *a lui* $S(z)$ *este deci unică*. Aceasta înseamnă că toate proprietățile lui $S(z)$ sînt cuprinse în șirul de coeficienți c_n, care sînt perfect determinați prin $S(z)$.

8. Serii tayloriene. Dacă în (1) se înlocuiește z prin $z - z_0$, z_0 fiind un număr complex oarecare dat, se obține ceea ce se numește o serie a lui Taylor, sau o serie tayloriană. O serie tayloriană nu se distinge de (1) decît prin deplasarea originii în $z = z_0$. O astfel de serie are deci un cerc de convergență cu centrul în z_0, a cărui rază R este legată în același mod de coeficienții c_n ca și la seriile (1).

Vom arăta acum că funcțiile $S(z)$ definite prin (1) *sînt dezvoltabile în serie tayloriană în jurul oricărui punct* z_0 *din* $|z| < R$, adică, oricare ar fi z_0, de modul $< R$, funcția $S(z)$, exprimată prin (1) în tot cercul $|z| < R$, este reprezentabilă și printr-o serie tayloriană

$$\sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n$$

într-un cerc cu centrul în z_0 *și interior lui* $|z| < R$.

Pentru aceasta, să înlocuim în expresia

$$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{10}$$

pe z cu $z_0 + (z - z_0)$ și să vedem în ce condiții putem ordona seria după puterile lui $(z - z_0)$ pentru a obține dezvoltarea căutată a lui $S(z)$.

Făcînd substituția $z = z_0 + (z - z_0)$ în (10), obținem o serie (10'), care poate fi scrisă, ca serie de sume, sub forma

$$\left\{\begin{array}{l} c_0 + \\ c_1 [z_0 + (z - z_0)] + \\ c_2 [z_0^2 + 2z_0 (z - z_0) + (z - z_0)^2] + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n \left[z_0^n + \frac{n}{1} z_0^{n-1} (z - z_0) + \ldots + (z - z_0)^n \right] + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{10'}$$

Suma (10) este identică cu suma (10') dacă sumăm pe aceasta din urmă considerînd fiecare linie ca un termen [adică dacă sumăm tabloul (10') pe linii]. Dar se știe * că asemenea tablouri (serii duble)pot fi sumate, indiferent, pe linii sau pe coloane *dacă sînt absolut convergente*. Deci, pentru acele valori ale lui z, care fac pe (10') absolut convergentă, sumînd pe coloane obținem tot $S(z)$.

Este clar însă că (10') este absolut convergentă pentru valorile z care satisfac relația

$$| z_0 | + | z - z_0 | < r < R, \tag{11}$$

deoarece atunci suma valorilor absolute ale termenilor din linia de rang n în (10') este inferioară lui

$$| c_n | r^n,$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} | c_n | r^n$$

este convergentă.

Or, (11) ne dă pentru z (deoarece r poate fi luat oricît de aproape de R)

$$| z - z_0 | < R - | z_0 |,$$

adică *în interiorul cercului cu centrul în* z_0 *și tangent interior cercului* $| z | \leqslant R$, tabloul (10') sumat pe coloane are ca sumă pe $S(z)$ din (10). Avem deci, în acest cerc,

$$S(z) = c_0' + c_1' (z - z_0) + c_2' (z - z_0)^2 + \ldots + c_n' (z - z_0)^n + \ldots \tag{12}$$

cu coeficienții c_n' determinați, cum se constată ușor, prin

$$\left\{\begin{array}{l} c_0' = S(z_0) \\ c_1' = S'(z_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_n' = \frac{1}{n!} S^{(n)}(z_0) \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{13}$$

* A se vedea *Introducerea*, § 2.

unde $S^{(n)}(z_0)$ reprezintă seria obținută prin derivarea *formală a seriei* (1) de n ori și prin înlocuirea apoi a lui z prin z_0.

Am obținut deci rezultatul următor, care dă chiar o rază minimă pentru valabilitatea dezvoltării în jurul lui z_0 a lui $S(z)$:

Funcția $S(z)$ este reprezentabilă prin seria tayloriană (12) *în jurul lui z_0, în cercul cu centrul în z_0 și tangent interior la circumferința $|z| = R$.*

Formulele (13) dau expresia coeficienților acestei serii tayloriene. Se vede îndată din ele (punctul z_0 fiind arbitrar în $|z| < R$) că toate seriile derivate formale obținute din (1) sînt convergente în $|z| < R$. Cum ele sînt toate serii de puteri ca și (1), aceasta înseamnă că raza lor de convergență este $\geqslant R$. Comparînd termenul general al lui $zS'(z)$ cu cel corespunzător al lui $S(z)$, se vede îndată că nu putem avea pentru $S'(z)$ o rază de convergență $> R$; deci, această rază este egală cu R. Cum $S''(z)$ este prima derivată formală a lui $S'(z)$, aceeași rază de convergență va fi și cea a seriei $S''(z)$ și deci și a seriilor următoare.

Pe de altă parte, este ușor de văzut că $S'(z)$ reprezintă efectiv derivata lui $S(z)$, în sensul definiției clasice date pentru funcțiile de variabilă reală. Într-adevăr, avem

$$S(z) - S(z_0) = (z - z_0)S'(z_0) + (z - z_0)^2 \frac{S''(z_0)}{1 \cdot 2} + \ldots$$

și deci

$$\lim_{z \to z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = S'(z_0).$$

Lui $S'(z)$ i se poate aplica același raționament și deci derivatele formale $S^{(n)}(z)$ reprezintă efectiv derivatele succesive ale lui $S(z)$.

Prin urmare, funcțiile $S(z)$ reprezentate prin seriile (1) sînt infinit derivabile și *aceste derivate sînt tot funcții reprezentate prin serii* (1) *cu același cerc de convergență*. Ele se obțin aplicînd, termen cu termen, regula de derivare a termenilor lui (1).

9. Funcțiile e^z, $\sin z$, $\cos z$. Pentru extensiunea funcțiilor elementare la domeniul complex al variabilei, se ia, prin definiție,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

serii care au ca rază de convergență $R = \infty$ și definesc deci funcțiile respective pentru orice valoare finită z.

Cum seriile acestea sînt absolut convergente*, se poate verifica printr-un calcul simplu că avem, oricare ar fi z și z',

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}, \qquad \sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

ca și formulele cunoscute de adunare pentru sin z și cos z.

Înlocuind pe z cu iz, se obțin cunoscutele relații euleriene

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}.$$

De asemenea, se vede îndată că avem, oricare ar fi z,

$$|e^z| = e^x, \quad \arg(e^z) = y + 2k\pi,$$

k fiind un întreg oarecare.

În baza rezultatelor din paragraful precedent, funcțiile definite mai sus sînt derivabile infinit și derivatele succesive se obțin prin derivarea termen cu termen a seriilor de definiție. Aceste serii reprezintă derivatele în tot planul (z).

II. FUNCȚII OLOMORFE ȘI MEROMORFE

10. Teoria elementară. Proprietățile stabilite în secțiunea precedentă pentru funcțiile reprezentate printr-o serie de puteri sînt fundamentale pentru teoria funcțiilor analitice. Teoria zisă «elementară» a funcțiilor analitice** ia ca punct de plecare posibilitatea dezvoltării locale în serie tayloriană a funcțiilor considerate. Vom formula, așadar, următoarea definiție:

Dat fiind un domeniu oarecare D în planul (z), o funcție $f(z)$, definită în mod univoc în fiecare punct din D, se numește olomorfă în D dacă, în jurul fiecărui punct $z_0 \in D$, ea poate fi reprezentată printr-o serie tayloriană; adică, dacă avem pentru orice $z_0 \in D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

într-un cerc cu centrul în z_0.

Funcțiile olomorfe în tot planul (z) (fără punctul ∞) sînt numite funcții *întregi*. În particular, polinoamele sînt funcții întregi. Tot funcții întregi sînt e^z, sin z și cos z, definite mai sus.

Se vede îndată că suma, diferența și produsul a două funcții olomorfe în D sînt tot funcții olomorfe în D***. Această proprietate de închidere se exprimă spunînd că *funcțiile olomorfe în D formează un inel.* Vom vedea mai departe cum putem lărgi clasa funcțiilor considerate pentru a forma un corp.

---

* A se vedea *Introducerea*, § 2.

** Teoria aceasta, bazată pe seria tayloriană, a fost dezvoltată sistematic de K. Weierstrass, unul din fondatorii teoriei funcțiilor de o variabilă complexă, și, simultan, de Ch. Méray.

*** Constantele sînt funcții olomorfe în orice domeniu din (z).

11. Zerourile funcțiilor olomorfe $f(z)$ sînt, prin definiție, punctele $a \in D$ pentru care avem $f(a) = 0$. În jurul unui zero $z = a$ avem, pentru orice funcție olomorfă, care nu este identic zero în vecinătatea lui a,

$$f(z) = c_p (z - a)^p + c_{p+1} (z - a)^{p+1} + \dots, \tag{14}$$

cu $c_p \neq 0$. Numărul p este *ordinul zeroului* a. Dacă $p = 1$, zeroul se numește *simplu*, dacă $p > 1$, zeroul este *multiplu*.

Din (14) se deduce

$$f(z) = (z - a)^p [c_p + c_{p+1} (z - a) + \dots].$$

Cum $c_p \neq 0$, funcția din paranteză este $\neq 0$ în vecinătatea lui $z = a$, adică într-un cerc destul de mic cu centrul în a. În acest cerc, a este deci singurul zero, și acest lucru este adevărat pentru orice alt zero în vecinătatea căruia nu avem $f(z) \equiv 0$.

Mulțimea $A \subset D$ a punctelor în care avem $f(z) = 0$ este deci compusă numai din puncte izolate și din puncte interioare lui A.

Fie $A_1 \subset A$ mulțimea punctelor izolate ale lui A, și $A_2 \subset A$ mulțimea punctelor interioare ale lui A. Avem, cu $A = A_1 + A_2$, $A_1 A_2 = 0$. Vom arăta că una din cele două părți, A_1 sau A_2, ale lui A este neapărat nulă.

Dacă nu ar fi așa, ar exista un $a_1 \in A_1$ și un $a_2 \in A_2$ și deci o linie poligonală λ așezată în întregime în D și unind pe a_1 cu a_2. Pe această linie poligonală ar exista atunci un punct α, așezat între a_1 și a_2 și astfel încît între a_2 și α, pe λ, nu ar fi decît puncte ale lui A_2, iar între α și a_1, pe λ, puncte oricît de apropiate de α, străine de A_2. Dar α fiind punct de acumulare de zerouri și așezat pe λ, deci în D, este el însuși un zero al lui $f(z)$, deci $\alpha \in A$. Dar α nu este punct interior al lui A, oricît de aproape de el găsindu-se puncte străine de A_2, nici punct izolat, el fiind punct de acumulare de zerouri ale lui $f(z)$. Deci, α nu poate fi nici în A_2, nici în A_1, ceea ce contrazice faptul că $\alpha \in A$. Prin urmare:

T e o r e m ă. *Orice funcție olomorfă în D, care nu este identic zero în D (adică $A_2 \neq D$) are numai zerouri izolate.* Deci mulțimea zerourilor unei funcții olomorfe în D este o mulțime finită sau numărabilă, afară de cazul în care funcția ar fi identic nulă în D (în care caz se confundă cu D).

12. Identitatea funcțiilor olomorfe. Proprietățile elementare de mai sus ale funcțiilor olomorfe arată deci că această clasă de funcții îndeplinește condițiile formulate în *Introducere* și exprimate prin ultimul postulat: două funcții olomorfe în D sînt identice dacă coincid pe o porțiune cît de mică din D.

Într-adevăr, putem demonstra acum chiar următoarea teoremă mai generală, care arată importanța noțiunii de olomorfie:

Teorema identității funcțiilor olomorfe. Două funcții f și φ, olomorfe în același domeniu D, sînt identice dacă valorile lor coincid pe o mulțime $A \subset D$, care are cel puțin un punct de acumulare în D.

Funcția $F = f - \varphi$ este olomorfă în D și se anulează în punctele lui A. Dacă însă A are un punct de acumulare $\alpha \in D$, aceasta înseamnă că avem și $F(\alpha) = 0$, deoarece în $z = \alpha$, funcția $F(z)$ este olomorfă și deci continuă.

Atunci α nu este însă un zero izolat pentru $F(z)$ și deci, conform propoziției din § 12, nu putem avea decît $F(z) \equiv 0$, adică $f(z) \equiv \varphi(z)$ în tot domeniul D.

În particular, dacă f și φ sînt identice pe un arc de curbă cît de mic în D, ele sînt identice în tot domeniul D.

13. Ca o aplicație imediată, *permanența* unor relații între funcțiile olomorfe rezultă îndată din cele arătate în paragraful precedent.

Fie $P(f_1, f_2, .., f_m)$ un polinom în $f_1, f_2, .., f_m$. Să presupunem că f_j ($j = 1,2,..., m$) fiind funcții olomorfe într-un același domeniu D care cuprinde o parte din axa reală, avem, *pentru valorile reale* ale lui z,

$$P(f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0.$$

Din cele de mai sus, rezultă îndată că *în tot domeniul* D avem aceeași relație între funcțiile f_j.

Avînd în vedere că funcțiile e^z, $\cos z$, $\sin z$ sînt olomorfe în tot planul finit (z), sîntem astfel asigurați că relațiile care exprimă, de exemplu, teoremele de adunare ale acestor funcții pentru valorile *reale* ale lui z, se extind, fără nici o modificare, pentru *valorile complexe* ale variabilei z, fără a mai avea de efectuat nici o verificare prin calcul.

Fie într-adevăr

$$\Phi(z, z') = 0 \tag{15}$$

o asemenea relație care are loc în mod identic pentru $z = x$ și $z' = x'$, x și x' fiind numere reale oarecare.

Presupunem $\Phi(z, z_0')$ și $\Phi(z_0, z')$ funcții olomorfe, respectiv în z și în z', oricare ar fi constantele z_0' și z_0. Avem atunci, după propoziția de mai sus, pentru orice x real și un z' oarecare,

$$\Phi(x, z') = 0$$

și deci, pentru orice z și z' complecși, relația (15).

14. Cîtul a două funcții olomorfe. Cîtul a două funcții olomorfe în D nu poate fi, evident, întotdeauna o funcție olomorfă în D, pentru că acest cît tinde, în modul, către infinit, atunci cînd z tinde către un zero al numitorului, care nu este și un zero al numărătorului. Vom arăta însă că, în afară de acest caz, cîtul a două funcții olomorfe este tot o funcție olomorfă.

Fie z_0 un punct oarecare în D, f și φ două funcții olomorfe în D astfel ca $\varphi(z_0) \neq 0$. Va trebui să arătăm că, în vecinătatea lui z_0, cîtul $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ este reprezentabil printr-o serie taylorianã. Putem evident presupune $z_0 = 0$, ceea ce se obține întotdeauna printr-o substituție $z = z_0 + z'$, care nu schimbă nimic în condițiile date. Fie deci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{și} \quad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

cu $\varphi(0) \neq 0$, adică $b_0 \neq 0$. Împărțind la nevoie cu b_0 pe $f(z)$ ca și pe $\varphi(z)$, vom avea de arătat că, în jurul originii, avem

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{16}$$

Din înmulțirea cîtului cu împărțitorul și identificare, obținem relațiile *necesare* pentru c_n

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_1 = a_1 - c_0 b_1 \\ c_2 = a_2 - c_0 b_2 - c_1 b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n = a_n - c_0 b_n \dots - c_{n-1} b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{17}$$

Rămîne de văzut dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ astfel obținută este convergentă într-un cerc cu raza > 0 în jurul originii.

Fie R_a și R_b respectiv razele de convergență ale seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ și r un număr pozitiv, inferior acestor două raze. Fie de asemenea M un număr astfel ca, oricare ar fi n, să avem

$$|a_n| r^n < M \quad \text{și} \quad |b_n| r^n < M. \tag{18}$$

Să considerăm atunci cîtul

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r^n} z^n}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{r^n} z^n} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots \tag{19}$$

Dacă pentru (19) calculăm coeficienții γ_n, după aceleași *formule* (17) care au dat coeficienții c_n pentru (16), vom obține:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= M \\ \gamma_1 &= \frac{M}{r} + \gamma_0 \frac{M}{r} \\ \gamma_2 &= \frac{M}{r^2} + \gamma_0 \frac{M}{r^2} + \gamma_1 \frac{M}{r} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_n &= \frac{M}{r^n} + \gamma_0 \frac{M}{r^n} + \dots + \gamma_{n-1} \frac{M}{r} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Comparînd aceste relații cu (17) și ținînd seama de (18), se vede că, oricare ar fi n, avem

$$|c_n| < \gamma_n.$$

Este deci suficient să arătăm că seria din membrul al doilea din (19) are o rază de convergență > 0.

Or, membrul întîi din (19) se poate scrie sub forma

$$\frac{M}{1 - z\left(\frac{M+1}{r}\right)},$$

făcînd suma progresiilor geometrice din (19).

Avem însă evident

$$\frac{M}{1 - z\left(\frac{M+1}{r}\right)} = M + M\left(\frac{M+1}{r}\right) z + M\left(\frac{M+1}{r}\right)^2 z^2 + \ldots,$$

seria din membrul al doilea (progresie geometrică) fiind convergentă în cercul

$$|z| < \frac{r}{M+1} \neq 0.$$

Prin urmare, asupra seriilor de puteri se pot efectua operațiile elementare: suma sau diferența ca și produsul a două serii de puteri este tot o astfel de serie cu rază de convergență > 0; cîtul este tot o astfel de serie cu o rază de convergență > 0, *dacă numitorul nu se anulează în* $z = 0$.

Această constatare ne duce, în mod natural, la lărgirea clasei de funcții olomorfe în D, astfel încît ea să fie închisă nu numai în raport cu adunarea, scăderea și înmulțirea, dar și cu operația de împărțire, adică să formeze un corp.

15. Funcții meromorfe în D. Rezultatul obținut în paragraful precedent ne determină să examinăm cazul cînd numitorul $\varphi(z)$ se anulează în $z = z_0$, în timp ce $f(z_0) \neq 0$.

Avem, așadar,

$$\varphi(z) = (z - z_0)^p \left[b_0' + b_1'(z - z_0) + \ldots + b_n'(z - z_0)^n + \ldots\right]$$

cu p întreg pozitiv și $b_0' \neq 0$. Prin urmare, ținînd seama de faptul că paranteza de mai sus nu se anulează în $z = z_0$,

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{c_0'}{(z - z_0)^p} + \frac{c_1'}{(z - z_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{c_{p-1}'}{z - z_0} + c_p' + c_{p+1}'(z - z_0) + \ldots,$$

unde $c_0' \neq 0$.

Seria din membrul al doilea este de tipul :

$$\sum_{n=\mu}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{20}$$

unde μ este un *întreg oarecare*. Seria (20) devine o serie taylorianã dacă $\mu \geqslant 0$. Ea se numește *serie polară*.

Deci, în vecinătatea unui zero al numitorului $\varphi(z)$, cîtul $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ al celor două funcții olomorfe f și φ se poate reprezenta printr-o serie polară, generalizare a seriei tayloriene.

Se vede îndată că ori de cîte ori $\mu < 0$, seria (20) este convergentă în $|z - z_0| < R$ pentru $z \neq z_0$, iar în z_0 «are valoarea ∞», în sensul că atunci cînd $z \to z_0$, suma seriei tinde, în modul, către ∞. Cu această observație, și ținînd seama de cele spuse în capitolul I, § 23, relativ la punctul de la ∞, seriile polare (20) prezintă o perfectă analogie cu seriile tayloriene. Se arată fără nici o dificultate, ca și mai sus pentru seriile de puteri pozitive, că două serii (20) nu pot avea aceeași sumă în fiecare punct din $|z - z_0| < \rho$, oricît de mic ar fi ρ, decît dacă coeficienții lor sînt aceiași, adică dacă seriile sînt identice. Reprezentarea cîtului $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ prin (20) este deci *unică*.

Vom spune că o funcție $F(z)$, definită într-un domeniu D, dar putînd lua eventual în unele puncte din D și valoarea ∞ (în sensul precizat), este *meromorfă în D, dacă, în vecinătatea oricărui punct $z_0 \in D$, ea este reprezentabilă printr-o serie de tipul* (20).

Punctele în care $F(z)$ este ∞, cărora le corespunde deci o reprezentare (20) cu $\mu < 0$, se numesc *poli* ai lui $F(z)$. Numărul $-\mu$ este *ordinul polului*.

Se constată îndată că *polii unei funcții meromorfe în D sînt puncte izolate*, întocmai ca și zerourile.

În jurul unui pol $z = b$ de ordinul p, funcția $\frac{1}{F(z)}$ este reprezentabilă printr-o serie taylorianã. Avem anume în vecinătatea lui $z = b$,

$$\frac{1}{F(z)} = \sum_{n=p}^{\infty} k_n (z - b)^n,$$

cu $k_p \neq 0$, membrul întîi tinzînd către 0 pentru $z \to b$ și avînd în acest punct un zero de ordin p.

Se vede acum cu ușurință că *funcțiile meromorfe în D formează un corp*. Într-adevăr, reprezentarea (20) arată imediat că suma, diferența și produsul a două funcții meromorfe în D este tot o astfel de funcție, iar faptul că în (20), coeficientul c_μ este $\neq 0$, arată, aplicînd rezultatul din paragraful 14, privitor la cîtul seriilor tayloriene, că și cîtul a două funcții meromorfe este o funcție meromorfă.

Fie într-adevăr $F_1(z)$ și $F_2(z)$ două funcții meromorfe în D. În vecinătatea unui punct z_0, care nu este pol nici pentru $F_1(z)$ nici pentru $F_2(z)$, raționamentele de mai sus arată că $\frac{F_1(z)}{F_2(z)}$ admite o dezvoltare (20) (care eventual se reduce la o dezvoltare taylorianã).

Dacă $F_1(z)$, sau $F_2(z)$, sau ambele aceste funcții au în $z = z_0$ un pol, cum fiecare din ele admite o dezvoltare (20), care se poate scrie și

$$\frac{c_0' + c_1'(z - z_0) + \dots}{(z - z_0)^P}$$

cu $c_0' \neq 0$, problema reprezentării lui $\frac{F_1(z)}{F_2(z)}$ se reduce la cazul precedent, obținîndu-se iarăși o serie (20).

16. După cum polinoamele sînt funcții olomorfe în orice domeniu D din planul (z) finit (adică fără punctul ∞), funcțiile raționale sînt funcții meromorfe în aceleași domenii *.

Într-adevăr, se știe că funcțiile raționale se pot descompune în sume finite de termeni de forma

$$z^m, \quad \frac{1}{(z - b)^m} \quad (m \text{ întreg pozitiv})$$

înmulțiți fiecare cu o constantă.

Funcția z^m este olomorfă în orice D, iar funcția $\frac{1}{(z - b)^m}$ în orice D care nu cuprinde pe $z = b$.

Într-adevăr, în cazul $m = 1$ și pentru $|z - z_0| < |b - z_0|$, avem

$$\frac{1}{z - b} = \frac{1}{(z - z_0) - (b - z_0)} = \frac{1}{z_0 - b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{b - z_0}\right)^n,$$

iar în cazul $m > 1$, prin ridicare la puterea m, se obține, pentru $\frac{1}{(z - b)^m}$, o serie de același fel.

În jurul punctelor b, funcția rațională are o reprezentare de tipul (20) din paragraful precedent.

17. Conform celor spuse în capitolul I, § 23, punctul de la infinit poate fi considerat ca punct interior pentru mulțimea D, dacă D cuprinde în întregime exteriorul unui cerc cu centrul în origine, adică o mulțime $|z| > r > 0$.

Pentru a extinde definițiile de mai sus la domenii care cuprind punctul ∞, să observăm că transformarea $z = \frac{1}{z'}$, care transformă punctul $z' = 0$ în $z = \infty$ și reciproc, face să corespundă interiorului unui cerc oarecare cu centrul în origine din planul (z'), exteriorul unui asemenea cerc din planul (z), și reciproc. De aici, următoarea definiție foarte firească: *o funcție definită univoc într-un domeniu D care cuprinde punctul $z = \infty$ este, prin definiție, olomorfă în D dacă este olomorfă în domeniul Δ obținut prin scoaterea din D*

* Vom vedea îndată, cînd vom considera și domenii care cuprind punctul ∞, că funcțiile raționale sînt meromorfe și în asemenea domenii.

a punctului $z = \infty$ *și dacă funcția obținută prin substituția* $z = \frac{1}{z'}$ *este dezvoltabilă în serie taylorianã în jurul lui* $z' = 0$.

Aceasta revine la a spune că o funcție $f(z)$ este olomorfă în D dacă ea este olomorfă în Δ și dacă $f\left(\frac{1}{z'}\right) = g(z')$ este olomorfă într-o vecinătate a lui $z' = 0$, adică într-un cerc $|z'| < r$.

De asemenea, $f(z)$ este meromorfă în D, dacă este meromorfă în Δ și dacă $f\left(\frac{1}{z'}\right) = g(z')$ este meromorfă în $|z'| < r$.

Cu aceste definiții se vede îndată că funcțiile raționale sînt meromorfe și în domenii D care cuprind pe $z = \infty$. Polinoamele nu sînt olomorfe în asemenea domenii, dar, fiind funcții raționale, ele sînt meromorfe în asemenea domenii. Pentru un polinom de gradul m, punctul de la infinit este *un pol de ordin* m.

18. Să observăm că polii unei funcții meromorfe în D nu pot avea nici un punct de acumulare în D.

Într-adevăr, un asemenea punct nu ar putea, evident, să fie punct ordinar, iar pe de altă parte, polii fiind izolați, el nu ar putea fi nici pol.

Fie B mulțimea polilor lui $f(z)$ în D.

Pe orice linie poligonală așezată în întregime în D și unind două puncte oarecare ale lui D, nu se află deci decît cel mult un număr finit de puncte din B, pe care le putem ocoli, modificînd linia poligonală în vecinătatea lor. Mulțimea $D-B$ este deci un domeniu, și funcția $f(z)$ este olomorfă în acest domeniu. În $D - B$ i se aplică deci lui $f(z)$ toate proprietățile funcțiilor olomorfe.

Să considerăm acum două funcții f_1 și f_2 meromorfe în același domeniu D. Mulțimea B_1+B_2, unde B_1 și B_2 sînt, respectiv, mulțimea polilor lui f_1 și f_2, nu are, nici ea, nici un punct de acumulare în D, și deci, în domeniul $\Delta = D - (B_1 + B_2)$, ambele funcții f_1 și f_2 sînt olomorfe. Se deduce de aici că, dacă avem $f_1 = f_2$, pe o mulțime A din Δ, care are cel puțin un punct de acumulare în Δ, atunci funcțiile f_1 și f_2 sînt identice în Δ. Cum cel puțin una dintre ele are ca pol pe orice $b \in (B_1 + B_2)$, ambele au poli în toate punctele lui $B_1 + B_2$ și deci avem $f_1 = f_2$ în tot domeniul D.

Principiul identității funcțiilor olomorfe din § 12 se extinde deci la funcțiile meromorfe, dacă pe mulțimea A, pe care avem $f_1 = f_2$, aceste funcții au o valoare comună finită și dacă A are cel puțin un punct de acumulare care nu este pol nici pentru f_1, nici pentru f_2.

Restricția de mai sus nu este însă necesară.

Într-adevăr, fie A o mulțime oarecare din D, pe care avem $f_1 = f_2$ și cu un punct de acumulare $\alpha \in D$.

Din cauză că nici B_1 nici B_2 nu au puncte de acumulare în D, α este punct de acumulare al unei mulțimi $E \subset A$, pe care f_1 și f_2 au valoare comună *finită*.

Pe de altă parte, $f_1 - f_2$ anulîndu-se pe E, deci în orice vecinătate a lui α, se vede că această diferență nu poate avea un pol în α. Cum ea este însă

meromorfă în D, în $z = \alpha$ ea are atunci neapărat un punct ordinar, în care va trebui să fie nulă.

Acest zero nefiind izolat, avem $f_1(z) - f_2(z) \equiv 0$, în tot domeniul în care funcția $f_1(z) - f_2(z)$ este olomorfă, deci în $D - (B_1 + B_2)$.

Cum însă $B_1 + B_2$ nu are decît puncte izolate, meromorfia lui $f_1 - f_2$ în D ne asigură că și pe această mulțime avem $f_1 - f_2 = 0$ și că deci avem $f_1 = f_2$ în tot domeniul D.

Prin urmare, principiul identității din § 12 este valabil exact sub aceeași formă și *pentru funcțiile meromorfe în* D, polii fiind socotiți ca puncte în care funcția ia valoarea ∞.

Funcțiile olomorfe sau meromorfe în D se mai numesc și *analitice în domeniul* D. Vom vedea mai tîrziu ce trebuie înțeles prin funcții analitice considerate în întreg domeniul lor de existență.

III. CÎTEVA TEOREME GENERALE ASUPRA FUNCȚIILOR OLOMORFE SAU MEROMORFE ÎN D

19. Să considerăm în planul (z) o curbă simplă închisă C (curbă închisă jordaniană, capitolul I, § 21).

C este imaginea, prin transformarea topologică $\mathfrak{T}$, a unei circumferințe, fie $|\zeta| = 1$, din planul (ζ). Vom desemna prin ρ și θ modulul și argumentul lui ζ.

După teorema generală din capitolul I, § 22, există o transformare T a lui (ζ) în (z) care, pe $|\zeta| = 1$, se confundă cu $\mathfrak{T}$. Fie

$$z = \Phi(\rho e^{\theta i}) \tag{21}$$

transformarea T, scrisă ca funcție de variabila complexă $\zeta = \rho e^{\theta i}$.

Dacă, în (21), facem ρ = constant, z descrie, în planul său, o curbă simplă închisă, cînd θ variază de la 0 la 2π.

Fie C_ρ curbele acestea pentru $\rho \leqslant 1$.

Curbele C_ρ sînt cuprinse în domeniul D (mărginit), determinat în (z) de curba închisă C după teorema lui Jordan. Pentru $\rho = 1$, C_ρ este chiar C, iar pentru $\rho = 0$, C_ρ se reduce la un punct $z = a$ din interiorul lui C. Vom spune că (21) definește *o deformare continuă* a lui C în a, în interiorul lui D.

Orice curbă simplă închisă se poate deci astfel deforma continuu într-un punct din domeniul pe care, conform teoremei lui Jordan, îl mărginește.

20. Fie $u = F(z)$, o transformare continuă a unui drum continuu, descriind o singură dată în sens direct curba C din (z), într-un drum continuu din planul (u).

Să presupunem că Γ nu trece prin $u = 0$. Atunci $\varphi = \arg u$ are un sens și valorile lui sînt de forma $\varphi_0 + 2k\pi$, k fiind un întreg arbitrar.

Cînd z se deplasează pe C, $\arg u$ este o funcție continuă de u și deci de z, dacă alegem pe k convenabil. Diferența dintre valoarea finală și valoarea inițială a acestui argument, cînd z descrie curba C, *o dată, complet, și în sens direct*, este *variația argumentului lui* $F(z)$; o vom nota prin $V[F(z), z \in C]$.

Valoarea cantității $V[F(z), z \in C]$ este întotdeauna un multiplu întreg de 2π, pentru că $u = F(z)$ revine la punctul său de plecare cînd z descrie complet curba C. Ea este independentă de punctul de plecare al lui z pe C și depinde numai de $F(z)$ și de C.

21. **Teorema variației argumentului.** Fie acum $f(z)$ o funcție olomorfă în $\overline{D} = D + C$. Înțelegem prin aceasta că $f(z)$ este olomorfă într-un domeniu $D' \supset \overline{D}$. Să presupunem că $f(z) \neq 0$, cînd $z \in C$. Zerourile lui $f(z)$ cuprinse în $\overline{D}$ nu pot fi atunci decît în număr finit.

Fie N acest număr.

În aceste condiții, vom demonstra următoarea propoziție, numită teorema variației argumentului: *cînd z descrie curba C, o dată, complet, în sens direct, avem*

$$V[f(z), \quad z \in C] = 2\pi N.$$

Vom arăta mai întîi că, dacă $f(z)$ nu se anulează în D, avem $V[f(z), z \in C] = 0$.

Cazul acesta particular al teoremei are, de altfel, un caracter pur topologic, demonstrația sa nefăcînd uz, după cum vom vedea, decît de continuitatea lui $f(z)$ și, în nici un fel, de olomorfia acestei funcții. Aceasta din urmă va interveni însă în mod esențial în demonstrația teoremei generale.

Am arătat în § 19, că putem deforma continuu pe C într-un punct $a \in D$, rămînînd în D cu curbele C_ρ. Pentru fiecare ρ avem un drum continuu $\Gamma_\rho = f(C_\rho)$ și, cum pe nici un C_ρ nu se află un zero al lui $f(z)$, nici unul din Γ_ρ nu trece prin $u = 0$.

Fiecărui C_ρ îi corespunde, așadar, o variație **a** argumentului $V[f(z), z \in C_\rho]$, bine determinată pentru orice $0 < \rho \leqslant 1$. Pentru un ρ dat, $V[f(z), z \in C_\rho]$ reprezintă creșterea funcției continue de θ

$$\varphi_\rho(\theta) = \arg f[\Phi(\rho e^{\theta i})],$$

cînd θ variază continuu de la zero la 2π, funcția Φ fiind cea care, în § 19, definește transformarea topologică T. Cum $\varphi_\rho(\theta)$ este funcție continuă în raport cu ambele variabile ρ și θ, $V[f(z), z \in C_\rho]$ este funcție continuă de ρ care, neputînd lua decît valori de forma $2k\pi$, cu k întreg, este neapărat constantă.

Pe de altă parte, cînd ρ tinde către zero, C_ρ tinde către punctul $z = a$ din D, iar Γ_ρ către punctul $u = f(a) \neq 0$. De la o valoare a lui ρ destul de mică înainte, Γ_ρ va fi deci așezat în întregime în unul din semiplanurile determinate pe (u) de una din axele lui.

Cum, pe un asemenea Γ_ρ, argumentul nu va putea varia cu mai mult de π, este clar că, pentru ρ suficient de mic, vom avea $V[f(z), z \in C_\rho] = 0$. Aceeași egalitate are loc atunci pentru orice $\rho \leqslant 1$ și, în particular, pentru $\rho = 1$, adică pentru $V[f(z), z \in C]$.

Să trecem acum la cazul general.

Fie a_j zerourile distincte ale lui $f(z)$ în D.

Să descriem cîte un cerc γ_j cu centrul în fiecare a_j, cercuri destul de mici pentru ca ele să fie cuprinse în D și exterioare unul altuia.

Să unim un punct al lui C cu un punct al lui γ_1 printr-un arc simplu λ_1 așezat în D, avînd numai extremitățile sale respectiv pe γ_1 și C și nici un

punct comun cu ceilalți γ_j; să unim apoi un al doilea punct al lui γ_1 cu un punct al lui γ_2 printr-un λ_2 analog, și așa mai departe pînă la ultimul γ_j, care va fi unit cu un alt punct al lui C. Arcele λ_j sînt alese astfel ca să nu aibă între ele puncte comune. După cum se vede în figura 4, se formează atunci două subdomenii, D_1 și D_2, ale lui D, fiecare limitat de cîte o curbă simplă, închisă, C_1 și C_2, formată din cîte un arc al lui C, din arcele λ_j și din cîte un arc al circumferințelor γ_j. În $\overline{D}_1$ ca și în $\overline{D}_2$ funcția $f(z)$ este olomorfă și nu are nici un zero.

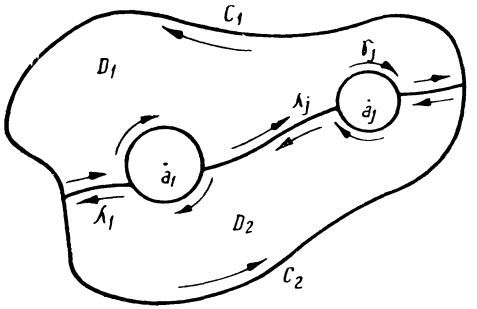


Fig. 4

După cazul particular demonstrat mai sus, avem deci

$$V[f(z),\ z\in C_1] = \\ = V[f(z),\ z\in C_2] = 0. \quad (22)$$

Cum arcele λ_j sînt, fiecare, descrise în sensuri contrare, după cum fac parte din C_1 sau din C_2, se vede că avem, ținînd seama de (22),

$$V[f(z),\ z\in C_1]+V[f(z),\ z\in C_2]=V[f(z),\ z\in C] - \sum_j V[f(z),\ z\in\gamma_j] = 0,$$

adică:

$$V[f(z),\ z\in C] = \sum_j V[f(z),\ z\in\gamma_j]. \quad (23)$$

Rămîne de calculat variația argumentului pentru cercurile γ_j. Pentru aceasta să luăm un a_j oarecare, fie a, și cercul său γ. Avem în interiorul și pe circumferința lui γ

$$f(z) = (z-a)^p[c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots],$$

cu $c_0 \neq 0$, p fiind ordinul zeroului $z = a$.

Dacă însemnăm prin $f_1(z)$ funcția din paranteză, avem:

$$V[f(z),\ z\in\gamma] = V[(z-a)^p,\ z\in\gamma] + V[f_1(z),\ z\in\gamma].$$

Or, ultimul termen al membrului al doilea este nul, deoarece $f_1(z)$ nu are zero în γ. În ceea ce privește primul termen, valoarea lui este evident $2p\pi$, argumentul lui $(z-a)^p$ fiind egal cu p. arg $(z-a)$.

Dacă socotim deci un zero de ordin p ca echivalent cu p zerouri simple, se vede că avem, făcînd suma din (23),

$$V[f(z),\ z\in C] = 2\pi N,$$

adică ceea ce era de demonstrat.

22. Teorema variației argumentului are numeroase aplicații, după cum vom vedea.

Vom arăta aici numai cum o propoziție, cunoscută sub numele de teorema lui Rouché, din care se deduce ușor teorema fundamentală a algebrei clasice, rezultă îndată din teorema din paragraful precedent.

Fie $f(z)$ și $\varphi(z)$ funcții olomorfe în $\overline{D} = D + C$, ambele diferite de zero pe C și astfel ca $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$ pe C. Atunci $f(z) + \varphi(z)$ are, în D, același număr de zerouri ca și $f(z)$.

Avem, într-adevăr,

$$f(z) + \varphi(z) = f(z)\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right].$$

Cum $u = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ rămîne întotdeauna în dreapta axei imaginare a planului (u), cînd z descrie curba C, avem

$$V[f + \varphi,\ z \in C] = V[f, z \in C].$$

Dacă $f + \varphi$ este un polinom și dacă luăm pentru f termenul său de gradul n cel mai înalt, se vede că, într-un cerc destul de mare pentru ca pe circumferința sa să avem $\left|\frac{\varphi}{f}\right| < 1$, polinomul $f + \varphi$ are exact n rădăcini.

23. Extensiune la cazul funcțiilor meromorfe. Teorema variației argumentului se extinde ușor la funcțiile meromorfe. Ea nu mai dă însă atunci numărul zerourilor cuprinse în D, ci numai diferența $N - P$ între numărul N al zerourilor și numărul P al polilor din D. Avem, așadar:

Variația argumentului lui $u = f(z)$, funcție meromorfă în $D' \supset \overline{D}$ (fără zerouri și fără poli pe C), cînd z descrie curba C, o dată, complet, în sens direct, este egală cu $2\pi(N - P)$.

Cazul particular $N = 0$, $P = 0$ poate fi folosit și aici la fel ca mai sus. Împărțind pe D în două subdomenii D_1 și D_2, ca mai sus, dar cu cercuri γ_a și γ_b, descrise respectiv în jurul zerourilor a și al polilor b, vom avea de evaluat variația argumentului lui u, cînd z descrie un γ_a sau un γ_b.

Pentru γ_a totul se petrece ca mai sus. În jurul lui γ_b funcția are reprezentarea

$$f(z) = \frac{1}{(z-b)^p}[c_0 + c_1(z-b) + c_2(z-b)^2 + \ldots],$$

cu $c_0 \neq 0$.

Se vede deci că variația argumentului lui $f(z)$, cînd z descrie γ_b, este egală cu $-2\pi p$. Și cum, pe de altă parte,

$$V[f(z), z \in C] = \sum_j V[f(z), z \in \gamma_{a_j}] + \sum_j [f(z), z \in \gamma_{b_j}],$$

se vede că $V[f(z), z \in C] = 2\pi(N - P)$, fiecare pol fiind, ca și fiecare zero, socotit cu ordinul său de multiplicitate.

24. Teorema invarianței noțiunii de domeniu. Transformări deschise. Dată fiind o funcție neconstantă olomorfă $f(z)$ într-un domeniu oarecare D din planul (z), fie $\Delta = f(D)$ imaginea lui D în planul u, prin transformarea $u = f(z)$.

Vom arăta că Δ este *întotdeauna un domeniu*.

Pentru aceasta să observăm că se poate generaliza ușor rezultatul obținut în § 21, în sensul că, în locul zerourilor lui $f(z)$, să considerăm punctele a_j în care $f(z)$ ia o anumită valoare finită u_0, dată arbitrar.

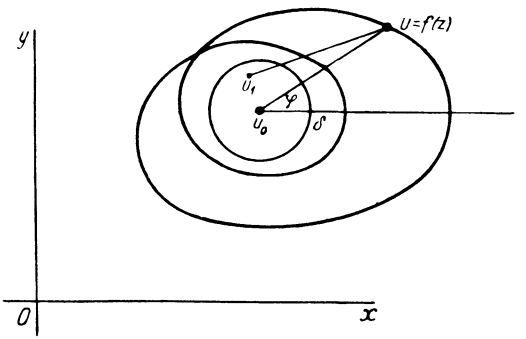


Fig. 5

Într-adevăr, va fi suficient să căutăm numărul zerourilor lui $f(z) - u_0$ aplicînd teorema variației argumentului funcției $f(z) - u_0$.

După cum arată numaidecît considerarea vectorului din (u) care reprezintă pe $f(z) - u_0$, aceasta ne duce la următoarea formulare: dacă $f(z)$ nu ia valoarea u_0 în nici-un punct de pe C, numărul punctelor a_j în care avem $f(a_j) = u_0$ cuprinse în D este egal cu variația argumentului vectorului din (u), care își are originea în u_0 și extremitatea în $u = f(z)$, cînd z descrie curba C, o dată, complet și în sens direct.

Fie acum $z_0 \in D$ și $u_0 = f(z_0)$.

Este suficient să arătăm că Δ are pe u_0 ca punct interior, pentru a demonstra că Δ este o mulțime deschisă.

Să descriem, din z_0 ca centru, un cerc $\gamma \subset D$ care să nu cuprindă nici un alt zero al lui $f(z) - u_0$ decît z_0. Aceasta este posibil, zerourile funcțiilor olomorfe (neidentic nule) fiind izolate.

Fie Γ imaginea, prin $u = f(z)$, a lui γ (fig. 5).

Cînd z descrie γ o dată, complet, în sens direct, u descrie Γ, revenind la punctul său de plecare și variația argumentului φ al vectorului $\overrightarrow{u_0 u}$ este de forma $2k\pi$, cu k întreg și Γ netrecînd prin u_0, din cauză că $f(z) \neq u_0$ pe C.

Din u_0 ca centru să descriem un cerc δ care să nu aibă nici un punct comun cu Γ. Cum Γ nu trece prin u_0, aceasta este posibil. Dacă $u_1 \in \delta$, variația argumentului vectorului $\overrightarrow{u_1 u}$, cînd z descrie γ, este o funcție continuă de u_1 și cum ea este de forma $2k\pi$, este constantă. De aici se deduce că, oricare ar fi $u_1 \in \delta$, funcția $f(z) - u_1$ are același număr de zerouri în interiorul lui γ. În particular, cînd $u_1 = u_0$, acest număr este $\geqslant 1$, deoarece $u_0 = f(z_0)$, z_0 fiind centrul lui γ. Deci, fiecare valoare $u_1 \in \delta$ este luată, în γ, cel puțin o dată. Aceasta înseamnă că imaginea lui γ, prin $u = f(z)$,

cuprinde întreg cercul δ și deci că $u_0 = f(z_0)$ este punct interior pentru Δ, deoarece $\gamma \subset D$.

Mulțimea Δ, fiind formată numai din puncte interioare ei, este mulțime deschisă. Dar D este conex fiind un domeniu; deci și Δ este conex, noțiunea de conex fiind invariant continuu (cap. I, § 19). Prin urmare, Δ este și el un domeniu.

O b s e r v a ț i e. Transformările continue care posedă proprietatea că lasă invariantă noțiunea de mulțime deschisă se numesc *transformări deschise*. Orice transformare deschisă lasă invariantă și noțiunea de domeniu. În particular, transformările definite de funcțiile olomorfe în D sînt deschise, după cum am văzut.

Se numește *transformare interioară*, o transformare deschisă $u = f(z)$ a lui A în B, care are în plus proprietatea că, oricare ar fi $b \in B$, mulțimea $f^{-1}(b)$ din A nu cuprinde în ea nici un continuu. Transformările definite de funcțiile olomorfe neconstante sînt evident și transformări interioare, întrucît $f^{-1}(b)$ este format, pentru ele, numai din puncte izolate.

25. Extensiunea la domenii cuprinzînd punctul de la infinit și la funcțiile meromorfe a propoziției de mai sus se face imediat. Este suficient să observăm că transformarea deja folosită mai sus

$$z = \frac{1}{z'}, \quad z' = \frac{1}{z}$$

transformă punctul $z = \infty$, interior lui D, în punctul $z' = 0$, interior lui D', imaginea lui D, și reciproc.

Pe de altă parte, dacă $f(z)$ este olomorfă în D, funcția $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ este olomorfă în D' și deci i se aplică teorema din paragraful precedent.

Pentru extensiunea la funcțiile meromorfe se va utiliza transformarea analogă

$$u = \frac{1}{u'}, \quad u' = \frac{1}{u},$$

care transformă funcția $u = f(z)$, avînd un pol în $z = b$, în funcția $\frac{1}{f(z)}$, olomorfă în vecinătatea lui $z = b$.

O b s e r v a ț i e. Dacă considerăm domeniul D, în care funcția f este meromorfă, nu în planul (z), ci pe sfera lui Riemann, și tot astfel mulțimea Δ a punctelor sale imagine, atunci punctul de la infinit pentru D și valoarea infinită a lui f în polii săi nu mai prezintă nici un caracter special și transformarea poate fi considerată continuă chiar și în punctele pe care ea le transformă în punctul de la infinit. Ea este o transformare deschisă (și chiar interioară) a domeniului D de pe sfera lui Riemann corespunzătoare lui (z) pe care-l transformă într-un domeniu Δ al sferei lui Riemann corespunzătoare lui (u).

26. Teorema maximului modulului. Una din consecințele cele mai importante ale teoremei invarianței noțiunii de domeniu este teorema maximului modulului funcțiilor olomorfe, de care ne vom ocupa acum.

O funcție reală $F(x, y)$, de cele două variabile reale x, y, se spune că are în (x_0, y_0) un *maxim local* (în sens larg) dacă există un cerc γ cu centrul în (x_0, y_0) astfel ca pentru orice punct (x, y) cuprins în γ, să avem

$$F(x, y) \leqslant F(x_0, y_0).$$

Dacă semnul $\leqslant$ este înlocuit cu $<$, maximul local este luat în sens *strict*. Dacă inegalitatea este înlocuită cu cea contrarie, avem de-a face cu un *minim local* (în sens larg sau strict, ca și în cazul precedent).

Fie $f(z)$ o funcție olomorfă neconstantă în D. Modulul ei $|f(z)|$ este o funcție reală de cele două variabile x și y ($z = x + iy$). Vom arăta că *în nici un punct din* D $|f(z)|$ *nu poate avea un maxim local în sens larg* (și deci, cu atît mai mult, în sens strict).

Fie, într-adevăr, $u_0 = f(z_0)$ și să presupunem că $|f(z)|$ ar avea în z_0 un maxim local în sens larg. Ar exista atunci un cerc γ cu centrul în z_0, în care am avea, pentru orice z,

$$|f(z)| \leqslant |f(z_0)|.$$

În imaginea lui γ prin $u = f(z)$ există, conform teoremei din § 24, un cerc δ cu centrul în u_0; δ este deci în întregime acoperit de această imagine (fig. 6). Inegalitatea de mai sus exprimă însă că orice punct imagine a punctelor z din γ este la o distanță $\leqslant |u_0|$ de originea planului (u). Aceasta este în contradicție cu existența lui δ, care cuprinde puncte astfel încît $|u| > |u_0|$.

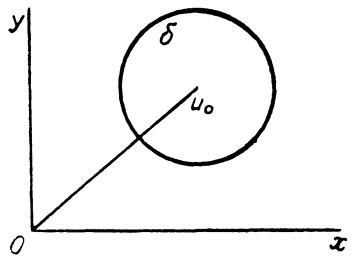


Fig. 6

O b s e r v a ț i a 1. Raționamentul se poate repeta fără nici o modificare pentru minimul local *dacă* $u_0 \neq 0$. Într-adevăr, în δ există întotdeauna și puncte u, astfel încît $|u| < |u_0|$, dacă $u_0 \neq 0$.

Deci nu poate exista, în D, pentru $|f(z)|$, *nici minim local, în afară de cazul cînd acest minim este zero.*

O b s e r v a ț i a 2. Dacă considerăm polii unei funcții meromorfe ca puncte în care valoarea modulului este ∞, se vede că, în cazul funcțiilor meromorfe, putem formula propoziția următoare, în care maximul și minimul joacă rol simetric: *orice maxim local al modulului unei funcții meromorfe în D este un pol, orice minim local este un zero.*

27. Să considerăm o funcție $\Phi(s, t)$ reală, definită și continuă în tot planul (u) (avem $u = s + it$) și să presupunem că Φ *nu are în nici un punct din* (u) *un maxim local.* În aceste condiții, *funcția* $\Phi[s(x, y), t(x, y)]$, *unde* $s(x, y) + it(x, y)$ *este olomorfă în D, nu are, nici ea, nici un maxim local în acest domeniu.*

Demonstrația este imediată cu ajutorul propoziției din § 24. Dacă în $z_0 = x_0 + iy_0$, funcția Φ ar avea un maxim local, aceasta ar însemna că, într-un cerc γ cu centrul în z_0, am avea pentru orice (x, y)

$$\Phi [s(x, y), t(x, y)] \leqslant \Phi [s(x_0, y_0), t(x_0, y_0)].$$

Or, acest cerc are, prin $u = f(z)$, adică prin transformarea

$$s = s(x, y), \qquad t = t(x, y),$$

o imagine care cuprinde un cerc δ cu centrul în $u_0 = s_0 + it_0$, și deci ar trebui să avem și în δ inegalitatea

$$\Phi(s, t) \leqslant \Phi(s_0, t_0),$$

ceea ce este contrar ipotezei făcute asupra funcției $\Phi(s, t)$.

Dacă luăm $\Phi = + \sqrt{s^2 + t^2}$, se obține teorema maximului modulului.

Propoziția este valabilă întocmai și dacă înlocuim maximul cu minimul, adică, dacă considerăm o funcție $\Phi(s, t)$ care nu are minim local în nici un punct din planul (u).

Dacă luăm $\Phi = s$, sau $\Phi = t$, aceste funcții nu au nici maxim nici minim local în nici un punct din (u). Deci,

Partea reală $s(x, y)$ ca și partea imaginară $t(x, y)$ a unei funcții olomorfe în D nu poate avea, în nici un punct din D, un maxim sau un minim local.

Vom vedea mai departe că funcțiile $s(x, y)$ și $t(x, y)$ sînt așa-zise funcții «armonice». Proprietatea aceasta a funcțiilor armonice este de o mare importanță în studiul lor *.

28. Fie D un domeniu mărginit, $\overline{D}$ închiderea sa, adică un domeniu închis ** mărginit.

Dacă $f(z)$ este olomorfă în $D' \supset \overline{D}$, funcția $|f(z)|$ își atinge marginea ei superioară în $\overline{D}$ în cel puțin un punct din $\overline{D}$.

Din teorema maximului modulului rezultă că un asemenea punct nu poate fi în interiorul lui $\overline{D}$; *el este deci neapărat pe frontiera lui* $\overline{D}$.

Sub această formă se enunță adesea teorema maximului modulului.*** Să observăm că din ea rezultă că marginea superioară a funcției $|f(z)|$ în $\overline{D}$ este aceeași cu marginea ei superioară pe frontiera lui $\overline{D}$. Același lucru se poate afirma despre marginile superioare (ca și marginile inferioare) ale funcțiilor $s(x, y)$ și $t(x, y)$, dacă $s(x, y) + it(x, y)$ este olomorfă în $\overline{D}$.

Vom da acum o importantă inegalitate, datorită lui H. A. Schwarz, relativă la maximul modulului unei funcții olomorfe în $|z| < R$, pe

---

* A se vedea și lucrarea S. Stoilow, *Observări asupra principiului extremelor în teoria funcțiilor*, în „Studii și Cercetări științifice". Iași, seria I, 1955, t. VI, nr. 1–2, p. 13–18.

** Reamintim că $\overline{D}$ nu este *domeniu* în sensul adoptat de noi.

*** Prin maximul sau minimul unei funcții într-o mulțime se înțelege marginea ei superioară sau inferioară în acea mulțime. Nu trebuie deci confundat maximul lui $f(z)$ în $\overline{D}$ cu un maxim *local* al aceleiași funcții în D.

cercurile $|z| = r < R$, inegalitate care, vom vedea, se deduce îndată din teorema maximului modulului, demonstrată în § 26.

29. Lema lui Schwarz. *Dacă în* $|z| < R$, *în care* $f(z)$ *este olomorfă, avem* $|f(z)| \leqslant M$ *și* $f(0) = 0$, *atunci, în orice punct* z *cuprins în* $|z| < R$, *avem inegalitatea-egalitate*

$$|f(z)| \leqslant \frac{M|z|}{R}, \tag{24}$$

egalitatea într-un singur punct din $|z| < R$ *atrăgînd după sine*

$$f(z) = \frac{Me^{\theta i}}{R} z$$

și deci egalitatea în tot cercul $|z| < R$.

Cum $f(z) = 0$, avem, în vecinătatea lui $z = 0$,

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

și deci $\frac{f(z)}{z}$ este olomorfă în tot cercul $|z| < R$.

După cele ce am observat mai sus, avem deci în orice z cuprins în $|z| \leqslant r < R$

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{M}{r}.$$

Dar, cum r poate fi luat oricît de aproape de R, avem și

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{M}{R}, \tag{24'}$$

adică inegalitatea (24) de mai sus.

Dacă într-un punct din $|z| < R$ avem $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{M}{R}$, conform teoremei maximului modulului, ținînd seama de (24') avem, în tot $|z| < R$, $\frac{f(z)}{z} = \text{const.}$ și deci

$$f(z) = \frac{Me^{\theta i}}{R} z,$$

ceea ce completează demonstrația lemei lui Schwarz.

Însemnînd cu $M(r)$ maximul modulului lui $f(z)$ în $|z| \leqslant r$ (sau, ceea ce este tot una, pe $|z| = r$), inegalitatea (24) duce la

$$M(r) \leqslant \frac{Mr}{R}. \tag{25}$$

30. Inegalitatea lui Carathéodory. Inegalități analoge cu (24) și (25) putem obține și cu ajutorul unei margini superioare A a părții reale $s(x, y)$ a lui $f(z)$, în loc de M. Să considerăm, pentru aceasta, funcția

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)}, \tag{26}$$

în care $f(z)$ este, ca mai sus, olomorfă în $|z| < R$ cu $f(0) = 0$ și $s(x, y) \leqslant A$ în $|z| < R$. Numărul A este > 0, după rezultatul din § 27, deoarece avem aici $s(0, 0) = 0$.

Funcția $\varphi(z)$ este și ea olomorfă în $|z| < R$ și avem $\varphi(0) = 0$. Pe de altă parte, avem

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{s^2 + t^2}{(2A - s)^2 + t^2} \leqslant \frac{s^2 + t^2}{A^2 + t^2} \leqslant 1.$$

Deci, putem aplica lui $\varphi(z)$ lema lui Schwarz și avem în $|z| < R$

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{|z|}{R}. \tag{27}$$

Or, dacă din (26) scoatem pe $f(z)$, obținem

$$f(z) = \frac{2A\varphi(z)}{1 + \varphi(z)}$$

și deci, ținînd seama de (27), inegalitatea

$$|f(z)| \leqslant \frac{2A \cdot |z|}{R - |z|}, \tag{28}$$

analogă cu (24) și inegalitatea

$$A(r) \leqslant M(r) \leqslant \frac{2A \cdot r}{R - r}, \tag{29}$$

analogă cu (25), în care $A(r)$ reprezintă maximul lui $s(x, y)$ în $|z| < r$ (sau, ceea ce este tot una, pe $|z| = r$).

Ca și (24) și (25), aceste inegalități presupun $f(0) = 0$.

Inegalitatea (28) este datorită lui C. Carathéodory.

Să observăm că în (28) și (29) putem înlocui A fie cu marginea superioară a lui $t(x, y)$, fie cu valoarea absolută a marginii inferioare a lui $s(x, y)$ sau $t(x, y)$.

Într-adevăr, nu avem decît să luăm în loc de $f(z)$, respectiv funcțiile $-if(z)$, $-f(z)$ și $if(z)$, care, toate, au același modul și dau deci în membrul întîi al inegalităților (28) și (29) aceeași funcție *.

* Să observăm că, după § 27, din cauză că $f(0) = 0$, aceste maxime sînt > 0 iar minimele < 0.

31. În sfîrșit, să mai dăm o aplicație a teoremei maximului modulului, care duce la așa-numita *teoremă a celor trei cercuri*, datorită lui J. H a d a m a r d.

Să considerăm coroana circulară Γ, definită prin

$$r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$$

și o funcție $f(z)$, olomorfă în interiorul și pe frontiera lui Γ.

Dacă numărul real α nu este întreg, z^α, și deci funcția

$$\varphi(z) = z^\alpha f(z),$$

are mai multe determinări în fiecare punct din Γ. Acestea sînt în număr finit sau infinit, după cum α este rațional sau irațional. Fiecare determinare a lui $\varphi(z)$ este însă olomorfă în vecinătatea unui punct oarecare din interiorul lui Γ *) și deci $|\varphi(z)|$ nu poate avea maxim local în nici un asemenea punct. Dar $|\varphi(z)|$, considerat ca funcție reală de variabile reale x și y, este univocă în tot Γ, căci modulul $|z|^\alpha$ nu are în fiecare punct decît o singură determinare: valoarea pozitivă a lui r^α. Prin urmare, $|\varphi(z)|$, care este și continuă în Γ, își atinge maximul pe unul sau altul din cercurile $|z| = r_1$, $|z| = r_2$.

Fie r un număr pozitiv oarecare cuprins între r_1 și r_2.

Cu aceleași notații ca mai sus, adică $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, vom avea deci

$$r^\alpha M(r) \leqslant \max [r_1^\alpha M(r_1), r_2^\alpha M(r_2)]. \tag{30}$$

Să alegem pe α astfel încît să avem

$$r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2),$$

adică să luăm

$$\alpha = \frac{\log \dfrac{M(r_2)}{M(r_1)}}{\log \dfrac{r_1}{r_2}}.$$

Substituind în (30), vom obține, după calcule simple

$$\log M(r) \leqslant \log M(r_1) \frac{\log \dfrac{r}{r_2}}{\log \dfrac{r_1}{r_2}} + \log M(r_2) \frac{\log \dfrac{r}{r_1}}{\log \dfrac{r_2}{r_1}}. \tag{31}$$

Această inegalitate are deci loc pentru trei cercuri oarecare cu centrul în origine și razele $r_1 < r < r_2$, dacă $f(z)$ este olomorfă în și pe frontiera

---

*) Se obțin, după cum se știe, determinările lui z^α scriind $z^\alpha = r^\alpha(\cos \alpha\theta + i \sin \alpha\theta)$. Argumentul θ avînd forma $\theta_0 + 2k\pi$, cu k întreg arbitrar, printr-o *determinare a funcției* z^α, în vecinătatea unui punct din Γ, se înțelege funcția univocă în această vecinătate care corespunde unei valori fixe a întregului k. Funcția $f(z)$ fiind olomorfă și deci univocă în Γ, determinărilor diverse ale lui z^α le corespund determinări ale lui $\varphi(z)$, olomorfe în vecinătatea fiecărui punct din Γ.

coroanei circulare limitate de r_1 și r_2. Inegalitatea (31) constituie teorema lui Hadamard.

Dacă în planul (x, y) construim curba

$$x = \log r, \qquad y = \log M(r),$$

inegalitatea (31) exprimă că această curbă este convexă între $r = r_1$ și $r = r_2$. De aceea, teorema se formulează de obicei și astfel:

Pentru orice funcție olomorfă, $\log M(r)$ *este funcție convexă de* $\log r$.

32. În tot acest capitol, rolul fundamental, în definiții ca și în demonstrații, îl joacă seriile de puteri (serii tayloriene), ca și unele din proprietățile topologice legate de continuitatea funcțiilor de variabilă complexă. Noțiunea de derivată nu a fost menționată decît în treacăt pînă aici; ea va trece de acum pe primul plan.

Plecînd de la o altă definiție a olomorfiei, vom regăsi în capitolul următor, pe altă cale, proprietățile stabilite aici, și, folosind simultan cele două definiții echivalente, vom putea pătrunde mai departe și mai adînc în teoria funcțiilor analitice.

CAPITOLUL III

TEORIA DIFERENȚIALĂ A OLOMORFIEI

I. FUNCȚIILE DERIVABILE ȘI REPREZENTAREA CONFORMĂ

1. Am văzut în capitolul precedent (§ 8) că funcțiile olomorfe sînt derivabile în orice punct al domeniului lor de olomorfie și că derivatele lor sînt funcții olomorfe în același domeniu.

Vom lua acum ca punct de plecare în studiul funcțiilor de o variabilă complexă existența derivatei (definită ca în cazul funcțiilor de o variabilă reală) și vom căuta să tragem toate consecințele pe care le comportă această existență. După A. L. C a u c h y — care a dezvoltat cel dintîi acest punct de vedere — vom numi deocamdată *monogene*, funcțiile derivabile de variabila complexă

$$z = x + iy.$$

Se va dovedi ulterior că monogenitatea în orice punct al unui domeniu implică olomorfia în acel domeniu, astfel încît, după cele reamintite aici, cele două noțiuni sînt echivalente, constituind două definiții ale aceleiași clase de funcții.

Independent de C a u c h y, dar cu cîțiva ani mai tîrziu, teoria funcțiilor de o variabilă complexă a fost dezvoltată și de B. R i e m a n n, plecînd de la noțiunea de derivată. B. R i e m a n n a împins foarte departe acest punct de vedere. După cum vom vedea îndată, acesta este strîns legat de considerații geometrice, astfel încît A. L. C a u c h y și B. R i e m a n n trebuie considerați ca fondatorii teoriei geometrice a funcțiilor de variabilă complexă.

2. Funcții monogene. O funcție $u = f(z)$ de variabila complexă $z = x + iy$, definită în mod univoc și continuă într-un domeniu D oarecare, are o derivată în $z = z_0 \in D$, dacă, oricum ar tinde z către z_0 în D, raportul

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

tinde către o limită finită bine determinată (depinzînd așadar numai de f și de z_0). Numim această limită $f'(z_0)$ derivata funcției $f(z)$ în z_0 și spunem că funcția $f(z)$ este *monogenă în* z_0.

Dacă funcția $f(z)$ este monogenă în orice punct din D, spunem că $f(z)$ este *monogenă în* D.

Este clar că suma, diferența sau produsul a două funcții monogene în z_0 este funcție monogenă în z_0. Faptul rămîne valabil pentru cît, dacă numitorul nu este nul în z_0.

Dacă scriem transformarea $u = f(z)$ (unde $u = s + it$) în mod explicit

$$s = P(x, y), \qquad t = Q(x, y),$$

atunci P și Q sînt funcții continue în raport cu ambele variabile reale x și y.

Monogenitatea lui $f(z)$ în punctul $z \in D$ implică și existența derivatelor parțiale ale lui P și Q în raport cu fiecare din variabilele x și y, precum și relațiile

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{1}$$

numite *ecuațiile lui Cauchy-Riemann*.

Într-adevăr, derivata $f'(z)$ fiind independentă de modul cum variabila independentă tinde către valoarea z, se obțin pentru $f'(z)$, făcînd să tindă această variabilă către z mai întîi pe dreapta paralelă cu axa reală, apoi pe cea paralelă cu axa imaginară, respectiv, expresiile

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ și } f'(z) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Identificate, aceste expresii dau relațiile (1).

Existența derivatelor parțiale ale lui P și Q în punctul $z \in D$ și verificarea de către ele în acest punct a ecuațiilor lui Cauchy-Riemann este deci *necesară* pentru monogenitatea lui $f(z)$ în punctul z. Această condiție, singură, nu este însă suficientă.

Să considerăm, de exemplu, funcția $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pe care o definim egală cu 0 în origine. Funcția este continuă și în $z = 0$, cum se vede îndată punînd $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, iar derivatele parțiale ale lui P și Q sînt nule în $z = 0$, deci satisfac relațiile (1). Cu toate acestea, cum se verifică ușor, funcția nu este monogenă în $z = 0$, derivata ei în acest punct depinzînd de drumul după care z tinde către 0 *.

3. Interpretarea geometrică a derivatei complexe. Fie $f(z)$ o funcție definită în D, monogenă în $z = z_0 \in D$ și fie $u_0 = f(z_0)$.

---

* Dimpotrivă, dacă este îndeplinită condiția (1) *în orice* punct din D, ea atrage după sine monogenitatea lui $f(z)$ în D. Demonstrația completă a acestui fapt a fost dată de Looman, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen*, 1923. O demonstrație fusese indicată de P. Montel, Comptes Rendus, 1913, t. 156, p. 1820.

Fie C un arc de curbă simplu din D, având o extremitate în z_0 și o tangentă în acest punct, și Γ imaginea prin $u = f(z)$ a lui C. Cînd z tinde către z_0, pe C, u tinde către u_0, pe Γ, și avem

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{u - u_0}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|, \tag{2}$$

iar dacă $f'(z_0) \neq 0$, avem și

$$\lim_{z \to z_0} \arg \left(\frac{u - u_0}{z - z_0} \right) = \arg f'(z_0). \tag{3}$$

Monogenitatea în z_0 implică valabilitatea acestor egalități independent de arcul C

Din (2) se deduce, așadar, că oricare ar fi direcția tangentei în z_0, raportul dintre elementul de arc al lui Γ (în u_0) și elementul de arc al lui C (în z_0) este același. În limbajul infinitezimal, aceasta se exprimă spunînd că un cerc infinitezimal cu centrul în z_0 are, prin $u = f(z)$, ca imagine un cerc infinitezimal cu centrul în u_0 și că raportul razelor acestor două cercuri este $|f'(z_0)|$.

Dar, consecința analogă dedusă din (3) este, pentru noi, de o importanță capitală.

Cum

$$\arg \left(\frac{u - u_0}{z - z_0} \right) = \arg (u - u_0) - \arg (z - z_0),$$

iar direcțiile vectorilor $\overrightarrow{u_0 u}$ și $\overrightarrow{z_0 z}$ tind pentru $z \to z_0$ către tangentele la Γ și C, se vede mai întîi că Γ admite o tangentă în u_0, apoi că unghiul cu care trebuie rotită direcția tangentei în z_0 la C, pentru a o aduce în poziție paralelă cu tangenta în u_0 la Γ, este egal (în mărime și semn) cu $\arg f'(z_0)$.

Dacă în z_0 considerăm acum două arce de curbă diferite C și C_0, făcînd între ele un unghi θ, arcele imagine Γ și Γ' vor face între ele același unghi θ, sensul lui fiind același.

Prin urmare, dacă funcția $u = f(z)$ este monogenă în z_0 cu $f'(z_0) \neq 0$, două arce de curbă oarecare, care se taie în z_0, avînd tangente în acel punct, se transformă, prin $u = f(z)$, în arce făcînd același unghi cu același semn. Vom spune că transformarea $u = f(z)$ *păstrează unghiurile în* z_0.

4. O transformare a unui domeniu D din planul (z) într-un domeniu Δ din planul (u), definită printr-o funcție monogenă în domeniul D cu derivata diferită de zero, conservă deci unghiurile în valoare și semn. O astfel de transformare se numește *conformă*. Se spune că ea realizează o *reprezentare conformă* a domeniului D pe domeniul Δ, dacă transformarea este și *univalentă* în D, adică dacă nu există două puncte diferite în D care să aibă aceeași imagine în Δ.

Se vede de aici strînsa legătură între monogenitatea funcției $f(z)$ și noțiunea geometrică, foarte importantă, de reprezentare conformă.

Îndeosebi, în teoria lui Riemann, această noțiune joacă un rol de primul plan. Vom avea ocazia să o studiem mai aprofundat în unele din capitolele următoare.

Condiții foarte largi pentru ca o transformare continuă să fie o reprezentare conformă sau o funcție monogenă, au fost date în special de D. M e n ș o v, condiții care depășesc încă cu mult chiar rezultatul indicat în nota de la pagina 65 *.

5. Vom arăta acum că ecuațiile (1), dovedite necesare pentru monogenitatea în punctul (x, y) sînt și suficiente dacă funcțiile P și Q sînt *diferențiabile* în (x, y) [acest lucru se întîmplă în particular dacă derivatele parțiale ale funcțiilor P și Q sînt continue în (x, y)].

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ fiind o deplasare arbitrară a punctului dat z în D, avem

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x P_x + \Delta y P_y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + i(\Delta x Q_x + \Delta y Q_y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y)}{\Delta z}, \quad (4)$$

unde $|\varepsilon_i| \to 0$ pentru $|\Delta z| \to 0$.

Aplicînd condițiile Cauchy-Riemann, avem

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = P_x + iQ_x + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta z} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta z} + i\varepsilon_3 \frac{\Delta x}{\Delta z} + i\varepsilon_4 \frac{\Delta y}{\Delta z}. \quad (5)$$

Pentru $\Delta z \to 0$, ultimii patru termeni din (5) tind către zero (deoarece $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leqslant 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leqslant 1$).

De aceea, oricum ar tinde Δz către zero avem

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = P_x + iQ_x, \quad (6)$$

ceea ce înseamnă că $f(z)$ este *monogenă* în (x, y).

6. În aceleași condiții de continuitate a derivatelor lui P și Q, vom mai arăta că, dacă transformarea $u = f(z)$ păstrează unghiurile în punctul (x, y), funcția este monogenă în punctul (x, y).

Fie dP și dQ diferențialele lui P și Q pentru creșterile infinitezimale dx și dy pe C și δP, δQ, δx, δy diferențialele și creșterile analoge pe C.

Cosinusul unghiului CC' va fi dat de

$$\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2} \cdot \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}$$

* A se vedea, de exemplu, D. M e n ș o v, *Conditions de monogénéité*, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris, 1936.

iar cel al unghiului transformat $\Gamma\Gamma'$, de

$$\frac{dP\,\delta P + dQ\,\delta Q}{\sqrt{dP^2 + dQ^2}\cdot\sqrt{\delta P^2 + \delta Q^2}}.$$

Pentru ca aceste două cosinusuri să fie egale, oricare ar fi dx, dy, δx, δy, trebuie ca, în particular, ele să se anuleze simultan.

Cum derivatele parțiale ale lui P și Q sînt continue în (x, y), avem

$$dP\,\delta P + dQ\,\delta Q = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x}\delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\delta y\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\delta x + \frac{\partial Q}{\partial y}\delta y\right) = 0$$

și aceasta trebuie să fie o consecință a relației

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y = 0.$$

Efectuînd produsele de mai sus și comparînd termenii corespunzători, se obține

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\,\frac{\partial Q}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Dacă cele patru derivate sînt nule în (x, y), relațiile lui Cauchy-Riemann sînt satisfăcute și, conform paragrafului precedent, funcția este monogenă în acest punct.

Dacă, de exemplu, $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$, egalitățile (7) arată că avem neapărat și $\frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0$.

A doua egalitate (7) dă atunci

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{\dfrac{\partial P}{\partial x}}.$$

Fie λ valoarea comună a rapoartelor acestora; vom avea

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial P}{\partial x}$$

care, înlocuite în prima relație (7), dau

$$(\lambda^2 + 1)\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 = (\lambda^2 + 1)\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 .$$

Cum λ este real, $\lambda^2 + 1$ nu poate fi zero, deci trebuie ca

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2$$

ceea ce dă, fie

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

și deci după a doua condiție (7)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

fie

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

și deci (după aceeași condiție)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

În primul caz se recunosc îndată ecuațiile lui Cauchy-Riemann, astfel încît, după numărul precedent, funcția este monogenă în (x, y). În al doilea caz, funcția nu mai este monogenă, dar funcția conjugată ei

$$u = \overline{f(z)} = P - iQ$$

verifică ecuațiile lui Cauchy-Riemann în (x, y) și este deci monogenă în acest punct.

O b s e r v a ț i e. Rezultă de aici că singurele transformări conforme ale lui D (P și Q fiind presupuse cu derivate continue) sînt cele definite de *funcțiile monogene în* D.

Transformările care păstrează valoarea unghiurilor de la (z) la (u), dar schimbă sensul lor, sînt cele definite de conjugatele acestora.

7. Funcții armonice. Dacă admitem că și derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcțiilor $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt continue în D, avem,

derivînd relațiile (1), prima în raport cu x și a doua în raport cu y, și adunînd,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

În mod analog se obține pentru $Q(x, y)$ aceeași relație.

Se numește *funcție armonică* o funcție $U(x, y)$ univoc definită în D, continuă împreună cu derivatele ei parțiale de primele două ordine *, și care satisface ecuația de mai sus, numită ecuația lui Laplace, adică

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Partea reală, ca și partea imaginară a unei funcții monogene în D *sînt deci funcții armonice în* D.

Reciproc, dîndu-se o funcție armonică într-un cerc γ din (z), fie $U(x, y)$, *există o funcție armonică* $V(x, y)$ *în* γ, *care, împreună cu* U, *formează o funcție* $U(x, y) + iV(x, y)$ *monogenă în* γ. $V(x, y)$ este perfect determinată, făcînd abstracție de o constantă aditivă, și se numește *conjugata armonică a lui* $U(x, y)$.

Într-adevăr, se știe că pentru ca să existe o funcție $V(x, y)$ satisfăcînd relațiile

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{8}$$

este necesar și suficient ca

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

ceea ce reprezintă tocmai condiția ca $U(x, y)$ să fie armonică. Cum domeniul γ este un cerc, funcția $V(x, y)$, care satisface pe (8), este univoc determinată în γ, făcînd abstracție de o constantă aditivă.

Există, așadar, echivalență între perechile de funcții armonice conjugate și funcțiile monogene. Noțiunea de funcție armonică joacă un rol fundamental în numeroase teorii de analiză și de fizică-matematică, unde ecuația lui Laplace intervine în probleme diverse. Legătura aceasta între funcțiile monogene și funcțiile armonice este deci de deosebită importanță.

8. Cîmp de vectori derivînd dintr-un potențial. Se spune că avem un cîmp de vectori într-un domeniu D din plan, dacă fiecărui punct din D îi este atașat un vector (A, B) cu originea în (x, y) și ale cărui proiecții A și B, respectiv pe axele Ox și Oy, sînt funcții date de (x, y).

* În această definiție nu este necesar să presupunem *dinainte* că derivatele sînt continue decît atît cît aceasta este implicat în existența derivatelor a doua. Dar, definiția aceasta lărgită duce la aceeași noțiune de funcție armonică. A se vedea, de exemplu, C. Carathéodory, *Funktionentheorie*, Basel, 1950, t. I. Vezi și volumul II al prezentei lucrări, cap. II.

Un cîmp de vectori revine, așadar, la o funcție de variabila complexă $z = x + iy$ definită în D.

$A(x, y)$ și $B(x, y)$ fiind continue cu derivate parțiale continue în D, se numește «rotor» al cîmpului în (x, y) mărimea

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y},$$

iar «divergență» a cîmpului în (x, y) mărimea

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}.$$

Dacă în D, rotorul este nul în orice punct, avem de-a face cu un cîmp «irotațional». Există atunci o funcție $U(x, y)$ astfel încît

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A(x, y) \quad \text{și} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = B(x, y),$$

adică cîmpul derivă dintr-un potențial $U(x, y)$ *.

Dacă și divergența este nulă, acest potențial este funcție armonică **. Or, ecuațiile care se obțin egalînd rotorul și divergența cu zero sînt tocmai ecuațiile lui Cauchy-Riemann. Un astfel de cîmp este deci definit printr-o funcție monogenă $B(x, y) + iA(x, y)$.

Dacă $V(x, y)$ este funcția armonică conjugată a lui $U(x, y)$, funcția $U(x, y) + iV(x, y)$ este monogenă. Curbele $U(x, y) = \text{const.}$ definesc liniile potențiale ale cîmpului, curbele $V(x, y) = \text{const.}$ (ortogonale celor dintîi după ecuațiile lui Cauchy-Riemann) definesc liniile de curent ale cîmpului.

Reciproc, orice funcție $U(x, y) + iV(x, y)$ monogenă în D definește un cîmp de vectori $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$, care derivă dintr-un potențial $U(x, y)$ și ale cărui linii de curent sînt date de $V(x, y) = \text{const.}$

Legătura aceasta dintre funcțiile monogene și cîmpurile de vectori (cărora li se pot da diverse interpretări fizice) face ca noțiunea de funcție monogenă să joace un rol însemnat în mecanica fluidelor, în teoria căldurii, sau în teoria electricității.

9. Înainte de a trece la studiul general al funcțiilor monogene, vom examina mai amănunțit o clasă de transformări definind funcții olomorfe (și deci monogene) foarte simple, dar care, prin proprietățile lor remarcabile, joacă un rol foarte important în teoria geometrică a funcțiilor de o variabilă complexă.

---

* Acesta este cazul unei mișcări potențiale cu regim permanent (independent de timp), cînd cîmpul de vectori este cel al vitezelor.

** Acesta este cazul cînd mișcarea este a unui fluid incompresibil.

II. TRANSFORMĂRI LINIARE

10. Se numesc transformări liniare cele definite prin funcțiile de forma

$$u = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{9}$$

unde a, b, c și d sînt constante complexe oarecare, cu singura condiție ca $ad - bc \neq 0$ *.

Funcția de z din (9) fiind olomorfă pe toată sfera lui Riemann, afară de $z = -\frac{d}{c}$ (unde are un pol simplu) și biunivocă pe toată sfera, realizează o reprezentare conformă a oricărui domeniu care nu cuprinde polul. Se constată cu ușurință că transformările (9) formează un grup: *grupul transformărilor liniare* (9).

Cum (9) se poate scrie, dacă $c \neq 0$,

$$u = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)},$$

se vede îndată că orice transformare (9) se descompune într-un număr finit de transformări de următoarele trei tipuri:

$$z' = z + h, \quad z' = kz, \quad z' = \frac{1}{z}, \tag{10}$$

unde h și k sînt constante complexe oarecare **.

Din transformările (10), prima reprezintă o translație definită prin vectorul h, a doua o rotație în jurul lui $z = 0$ de unghi egal cu arg k, urmată de o similitudine (omotetie) de centru $z = 0$ și cu raportul de similitudine $|k|$, iar cea din urmă reprezintă o inversiune geometrică în raport cu $z = 0$ și cu constanta de inversiune $= 1$, urmată de o simetrie față de axa reală, cum arată îndată relația dintre modulurile și argumentele lui z și z'. Se știe, de altfel, din geometria elementară că similitudinea [care intră în cea de-a doua transformare (10)] păstrează unghiurile cu sensul lor, iar inversiunea ca și simetria față de o dreaptă păstrează, fiecare, valoarea unghiului răsturnînd sensul astfel încît și ultima transformare (10) păstrează unghiurile cu sensul lor. Translația și rotația fiind simple deplasări în plan, se vede astfel și direct că (10), și deci (9) sînt transformări conforme.

Se mai știe că toate aceste transformări geometrice elementare conservă cercurile ca și dreptele, inversiunea putînd să transforme un cerc într-o dreaptă, și reciproc.

Dacă considerăm o dreaptă din planul (z) ca un cerc trecînd prin punctul $z = \infty$ (ceea ce ea devine efectiv prin proiecția stereografică care reprezintă planul (z) pe sfera lui Riemann), putem deci spune că *cercul este un invariant*

* Dacă am avea $ad - bc = 0$, funcția din membrul al doilea din (9) s-ar reduce la o constantă.

** Dacă $c = 0$, (9) se reduce evident la primele două operații (10).

față de transformările (9) *. Grupul transformărilor liniare (9) mai posedă însă, pe lîngă unghi și cerc, și alți invarianți de un deosebit interes, de care ne vom ocupa acum.

11. Raportul anarmonic. Se numește *raport anarmonic* (z_1, z_2, z_3, z_4) *al celor patru puncte* cantitatea

$$\lambda = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4} . \tag{11}$$

Dacă schimbăm ordinea celor patru puncte într-un mod oarecare, se obțin, în total, șase cantități, în general distincte,

$$\lambda, \ \frac{1}{\lambda}, \ \lambda - 1, \ \frac{1}{\lambda - 1}, \ \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \ \frac{\lambda - 1}{\lambda} .$$

Vom înțelege, în general, prin raport anarmonic al punctelor z_1, z_2, z_3, z_4 cantitatea λ definită prin (11).

Se verifică îndată că oricare din transformările (10), aplicate simultan celor patru puncte, lasă invariant raportul anarmonic. Deci, *raportul anarmonic este un invariant pentru grupul transformărilor liniare* (9).

O aplicație imediată a acestei proprietăți ne permite să scriem direct, fără nici un calcul, transformarea (9), care transformă trei puncte date distincte z_1, z_2, z_3, în alte trei puncte date distincte u_1, u_2, u_3.

Într-adevăr, fie z un punct arbitrar din (z) și u imaginea lui prin transformarea căutată. Cum raportul anarmonic (z_1, z_2, z_3, z) trebuie să fie același cu (u_1, u_2, u_3, u) vom avea

$$\frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} \cdot \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u} = \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z} , \tag{12}$$

care, rezolvată în raport cu u, reprezintă o transformare (9) îndeplinind evident condiția cerută. Se vede că transformarea este complet determinată prin desemnarea celor trei puncte z_1, z_2, z_3, împreună cu imaginile lor respective.

Dacă luăm pentru z_1, z_2, z_3 trei puncte fixe, alese arbitrar, u_1, u_2, u_3 sînt cei trei parametri complecși liberi de care depind transformările (9) (a, b, c și d pot întotdeauna fi considerați făcînd abstracție de un factor de proporționalitate).

Să ne propunem acum să găsim toate transformările (9) care transformă un cerc dat C din (z), într-un cerc dat Γ din (u). Putem alege, pe C, trei puncte fixe z_1, z_2, z_3. Imaginile lor vor putea fi alese arbitrar pe Γ, ceea ce reprezintă trei parametri *reali* liberi. Transformările căutate vor fi date de (12) și vor depinde de acești trei parametri reali. Dacă Γ se confundă cu C, transformările care-l transformă în el însuși formează un subgrup important al grupului (9), pe care-l vom examina mai îndeaproape.

---

* Ceea ce era adevărat numai în domeniul infinitezimal pentru transformările definite prin funcții monogene oarecare (§ 3) este deci adevărat și „în mare" pentru transformările de tip (9).

O b s e r v a ț i a 1. Dacă pentru C luăm o dreaptă, axa reală de exemplu, se vede imediat că raportul anarmonic a patru puncte așezate pe un același cerc trebuie să fie întotdeauna real, așa cum este raportul celor patru puncte imagine ale lor de pe axa reală. Reciproc, dacă raportul anarmonic a patru puncte este real, ele se află neapărat pe un același cerc, imaginea celui de-al patrulea punct neputînd să cadă în afară de axa reală, deoarece, în acest caz, raportul său anarmonic cu cele trei puncte de pe axă nu ar mai fi real.

O b s e r v a ț i a 2. Transformarea (12), care transformă C în Γ, făcînd să corespundă punctelor z_1, z_2, z_3, respectiv, punctele u_1, u_2, u_3, transformă interiorul cercului C în interiorul sau în exteriorul lui Γ. Într-adevăr, două puncte din interiorul lui C nu pot avea unul imaginea sa în interiorul lui Γ, altul în exteriorul lui, deoarece unind cele două puncte din C printr-un segment de dreaptă, imaginea acestuia ar trebui să aibă un punct pe circumferința Γ, ceea ce nu este posibil, circumferința Γ fiind imaginea circumferinței C și transformarea fiind biunivocă.

Interiorul lui C va avea ca imagine interiorul lui Γ, dacă cele trei puncte z_1, z_2, z_3 și u_1, u_2, u_3, luate în această ordine, definesc pe circumferințele respective, *același sens*. Dacă sensul este contrar pe C și Γ, interiorul lui C se transformă în exteriorul lui Γ, și reciproc.

Lucrul se constată cu ușurință, considerînd unghiul format de normala interioară la C în z_1 cu arcul de cerc care pornește din z_1 în sens pozitiv și sensul unghiului drept corespunzător în u_1, care trebuie să fie același cu al primului unghi, reprezentarea fiind conformă.

12. Simetria față de un cerc. Fie dat un cerc C de centru O și de rază r și un punct oarecare P în plan. Se numește *simetric al lui P față de cercul C*, punctul P', așezat pe dreapta OP și astfel ca

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Simetricul lui O este ∞, și reciproc.

Se demonstrează îndată, în geometria elementară, că orice cerc care trece prin P și P' este ortogonal lui C, și reciproc. Prin urmare, simetria față de C se poate defini astfel: simetricul P' al lui P este punctul de intersecție comun al cercurilor ortogonale la C, trecînd prin P.

Această definiție arată imediat că *simetria față de cerc se păstrează printr-o transformare liniară*. Adică, două puncte simetrice față de C se transformă, prin orice transformare (9), în două puncte simetrice față de imaginea lui C, prin aceeași transformare (9). Într-adevăr, noțiunea de cerc precum și valoarea unghiului, adică în particular noțiunea de ortogonalitate, rămînînd invariante prin (9), rezultatul este imediat.

Definiția invariantă a simetriei față de cerc arată că, în cazul cînd acesta este o dreaptă, simetria se confundă cu noțiunea obișnuită de simetrie față de dreaptă.

13. Transformările liniare care transformă cercul $|z| \leqslant R$ în el însuși. Cei trei parametri care figurează în subgrupul acesta al lui (9) permit să punem condiții suplimentare. Să căutăm, așadar, transformările lui $|z| \leqslant R$

în el însuși, care transformă un punct dat $|z_0| < R$ în $z' = 0$. Transformarea va fi deci de forma

$$z' = \frac{z - z_0}{z - b} \cdot k,$$

cu b și k constante. Cum 0 și ∞ sînt simetrice față de $|z| = R$, b va trebui să fie simetricul lui z_0 față de același cerc. Aceasta înseamnă că vom avea

$$b = \frac{R^2}{\bar{z}_0},$$

$\bar{z}_0$ fiind cantitatea complexă conjugată a lui z_0.

Cu o altă constantă k, avem deci

$$z' = \frac{z - z_0}{R^2 - \bar{z}_0 z} \cdot k.$$

O astfel de transformare transformă neapărat (oricare ar fi k) pe $|z| = R$, într-un cerc $|z| = R'$, deoarece acestea sînt singurele cercuri față de care 0 și ∞ sînt simetrice. Pentru ca să avem $R' = R$, trebuie deci, și este suficient, ca, făcînd $z = R$, să avem

$$\left| \frac{R - z_0}{R^2 - R\bar{z}_0} \right| \cdot |k| = R,$$

ceea ce dă $|k| = R^2$, adică $k = R^2 e^{\theta i}$, θ fiind real arbitrar. Transformările căutate sînt deci de forma

$$z' = \frac{R^2 (z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \cdot e^{\theta i}.$$

Parametrul θ, a cărui variație reprezintă o rotație în jurul originii, permite deci să cerem, în plus, ca o direcție dată, pornită din z_0, să se transforme, de exemplu, în direcția pozitivă a axei reale. Cu aceste condiții, transformarea este complet determinată. Cei trei parametri reali ai ei sînt coordonatele lui z_0 și θ.

Considerînd (13) ca un grup de deplasări în $|z| < R$, vom construi mai departe o geometrie corespunzătoare în $|z| < R$, care se va dovedi a fi o reprezentare a geometriei neeuclidiene a lui Lobacevski. Vom da însă înainte o clasificare a diverselor transformări liniare (9), care pune în evidență comportarea lor față de cercurile lăsate invariante.

14. Transformări liniare cu cerc invariant. Transformările (9), care posedă un cerc invariant, sînt de o mare însemnătate în teoria funcțiilor analitice. Ele sînt numite uneori și transformări «fuchsiene», după H. P o i n c a r é care, prin lucrări celebre, a scos în evidență importanța lor. Clasificarea care o avem în vedere se bazează ,în primul rînd, pe punctele fixe ale unei transformări (9), puncte numite și puncte duble.

Un punct fix al unei transformări (9) este un punct care este propria sa imagine. Punctele fixe sînt deci date prin ecuația

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

obținută făcînd $u = z$ în (9).

Ecuația are, în general, două rădăcini distincte (dintre care una este ∞ dacă $c = 0$). Ea are rădăcinile sale confundate dacă $(d - a)^2 + 4bc = 0$ (și acestea sînt ∞ dacă $c = 0$ și $a = d$).

Să considerăm mai întîi cazul punctelor fixe distincte, fie α_1 și α_2. Transformarea

$$Z = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}, \quad U = \frac{u - \alpha_1}{u - \alpha_2}, \tag{14}$$

aplicată simultan lui z și lui u în (9), duce la o transformare liniară între Z și U. Aceasta din urmă, trebuind să aibă punctele fixe 0 și ∞, va fi neapărat de forma

$$U = kZ, \tag{15}$$

cu k constantă.

Forma (15) se numește *forma canonică* a lui (9), în cazul a două puncte fixe distincte.

Forma canonică permite să distingem următoarele cazuri:

1° k real; transformarea (15) lasă invariante toate dreptele care trec prin origine; ea lasă invariantă familia cercurilor cu centrul în origine.

Dacă trecem acum la forma inițială a transformării, care se poate scrie, ținînd seama de (14),

$$\frac{u - \alpha_1}{u - \alpha_2} = k \cdot \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}, \tag{16}$$

se vede că transformările caracterizate prin k real lasă invariante cercurile care trec prin cele două puncte fixe; ele lasă invariantă familia cercurilor ortogonale acestora (care de altfel sînt acelea față de care α_1 și α_2 sînt simetrice).

Transformările de acest fel se numesc *hiperbolice*.

2° $|k| = 1$; transformarea (15) lasă invariante cercurile cu centrul în origine; ea lasă invariantă familia dreptelor care trec prin origine. Deci, transformările (16) în care $|k| = 1$ lasă invariante cercurile ortogonale la cercurile care trec prin cele două puncte fixe; ele lasă invariantă familia acestora din urmă.

Transformările acestea se numesc *eliptice*.

3° k nereal și $|k| \neq 1$; se vede cu ușurință că nici un cerc nu rămîne invariant.

Transformările (16) corespunzătoare se numesc *loxodromice*.

Să considerăm acum cazul punctelor fixe confundate.

Fie α punctul fix dublu.

Transformarea (14) nemaiavînd sens, forma canonică (15) și deci și (16) nu mai sînt valabile.

Să punem aici

$$Z = \frac{1}{z - \alpha}, \quad U = \frac{1}{u - \alpha},$$

ceea ce duce la o formă canonică cu un singur punct fix la ∞.

În loc de (15), vom avea deci

$$U = Z + h, \tag{17}$$

cu h constantă.

Există o familie de drepte paralele (dreptele paralele cu vectorul h) care rămîn invariante prin (17). Familia ortogonală de drepte rămîne și ea invariantă. Deci transformările (9), cu un singur punct fix α, pot fi puse sub forma canonică

$$\frac{1}{u - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + h. \tag{18}$$

Ele lasă invariante cercurile care trec prin punctul fix și care sînt, toate, tangente între ele în acest punct, cu direcția tangentei comune depinzînd de h. De asemenea, ele lasă invariantă familia cercurilor trecînd prin punctul fix și ortogonale la cele dintîi.

Transformările acestea se numesc *parabolice*.

În rezumat, există printre transformările (9) trei tipuri distincte de transformări cu cerc invariant: hiperbolice, eliptice și parabolice. Terminologia adoptată se explică considerînd cazul transformărilor *reale*, adică al transformărilor care lasă invariantă axa reală.

15. Transformări liniare reale. Se arată ușor că, dacă axa reală este lăsată invariantă printr-o transformare (9), coeficienții a, b, c, d pot fi luați reali. Transformările care lasă invariantă axa reală sînt deci caracterizate prin faptul că a, b, c și d sînt reali.

Raportîndu-ne la observația 2 din § 11, se vede că $ad - bc > 0$ face ca semiplanul superior, și deci și semiplanul inferior, să se transforme în el însuși.

Transformările reale hiperbolice sînt cele care au punctele lor fixe reale, cele eliptice sînt cele cu puncte fixe imaginare conjugate; cele hiperbolice lasă invariante toate porțiunile din semiplan ale cercurilor care trec prin cele două puncte fixe reale; cele eliptice, cercurile ortogonale celor care trec prin punctele fixe imaginar conjugate.

Transformările parabolice sînt cele cu puncte fixe reale confundate; ele lasă invariante cercurile tangente la axa reală în acest punct.

16. Aplicație la reprezentarea lui Poincaré a geometriei lui Lobacevski. Să considerăm cercul deschis $|z| < 1$, ca fiind planul unei geometrii neeuclidiene, în care deplasările sînt cele definite prin grupul transformărilor

$$z' = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} e^{\theta i} \tag{19}$$

al lui $|z| \leqslant 1$ în el însuși. Circumferința joacă aici rolul infinitului din planul euclidian.

Dacă numim dreaptă neeuclidiană arcul de cerc interior lui $|z| < 1$ al unui cerc ortogonal lui $|z| = 1$, se constată cu ușurință că prin două puncte oarecare din $|z| < 1$ trece o asemenea dreaptă și că două oarecare din punctele ei o determină. De asemenea, toate celelalte axiome ale geometriei euclidiene plane sînt verificate, în afară de «postulatul paralelelor» (postulatul lui Euclid).

Într-adevăr, se vede imediat că printr-un punct dat trec *două* drepte neeuclidiene care întîlnesc, pe $|z| = 1$, o dreaptă neeuclidiană oarecare dată și care nu conține acel punct. Ele se numesc *paralele* la dreapta neeuclidiană dată. În unghiul format de aceste două paralele, sînt o infinitate de alte drepte neeuclidiene care nu taie dreapta dată; ele se numesc drepte *nesecante*. Acesta este tocmai postulatul cu care, în geometria lui Lobacevski, se înlocuiește postulatul lui Euclid. Geometria noastră $|z| < 1$ va da deci o imagine a geometriei lui Lobacevski. De această imagine s-a folosit H. Poincaré în unele din cercetările sale asupra grupurilor fuchsiene. Să vedem cum se poate constitui această geometrie, introducînd și celelalte elemente necesare, ca unghi, lungime, distanță etc. Toate aceste noțiuni vor trebui definite invariant față de grupul (19) al deplasărilor neeuclidiene.

17. Unghiul fiind un invariant al întregului grup (9), vom păstra valoarea euclidiană a lui. În ceea ce privește lungimile neeuclidiene, H. Poincaré a considerat un invariant diferențial al transformărilor (19), care va înlocui, în geometria neeuclidiană, elementul de arc ds euclidian.

Fie ζ un punct dat din $|z| < 1$, ζ' imaginea sa prin (19).

Pentru a calcula raportul $\frac{ds'}{ds}$ al elementelor de arc în ζ' și ζ, să descompunem pe (19) în două transformări din același grup: una care duce pe ζ în 0, și alta care duce pe 0 în ζ'. Prima va fi

$$z'' = \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta} z},$$

ceea ce dă, în $z = \zeta$,

$$z'' = 0 \text{ și } \frac{ds''}{ds} = \frac{1}{1 - |\zeta|^2},$$

cea de-a doua, fiind inversa transformării

$$z'' = \frac{z - \zeta'}{1 - \bar{\zeta}' z},$$

va da tot astfel

$$\frac{ds'}{ds''} = 1 - |\zeta'|^2.$$

Avem deci

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{1 - |\zeta'|^2}{1 - |\zeta|^2}$$

și, înlocuind ζ cu un z oarecare,

$$\frac{ds'}{1-|z'|^2} = \frac{ds}{1-|z|^2},$$

ceea ce arată că expresia

$$d\sigma = \frac{ds}{1-|z|^2} \tag{20}$$

este un invariant pentru transformările (19).

Vom lua această expresie drept definiție a elementului de arc *neeuclidian* $d\sigma$.

În ceea ce privește cazul cînd, în locul lui $|z| = 1$, este luată o dreaptă, o putem reduce la axa reală, și transformările (19) sînt atunci înlocuite cu transformările reale cu $ad - bc > 0$, planul geometriei noastre fiind semiplanul superior.

Raționamentul care ne-a dus mai sus la expresia (20) nu mai este aici valabil. Se verifică însă cu ușurință că putem lua

$$d\sigma = \frac{ds}{y}. \tag{21}$$

Într-adevăr, avem, pe de o parte,

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2},$$

raportul din membrul întîi reprezentînd modulul derivatei lui $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, în raport cu z (§ 3), iar pe de altă parte, cum arată un calcul ușor, avem

$$\frac{y'}{y} = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2},$$

unde y' este coeficientul lui i din z'. Se deduce îndată din aceste două relații

$$\frac{ds'}{y'} = \frac{ds}{y},$$

adică invarianța lui (21).

Vom putea deci lua, indiferent, domeniul $|z| < 1$ sau semiplanul $y > 0$ ca plan al geometriei neeuclidiene.

18. Cu ajutorul invarianților diferențiali introduși, vom defini acum o *distanță neeuclidiană*.

Să reluăm grupul (19) și invariantul diferențial (20).

Lungimea unui arc oarecare din $|z| < 1$ va fi dată de integrala lui (20) în lungul acestui arc. Pentru a-i găsi expresia, în cazul segmentului de dreaptă neeuclidian, între două puncte z_1 și z_2, să aplicăm punctelor o transformare (19) care duce pe z_1 în 0. Distanța (adică lungimea segmentului de dreaptă

neeuclidian) va rămîne neschimbată, (20) fiind invariant. Putem alege transformarea (19) astfel încît segmentul transformat să fie pe axa reală pozitivă (§ 13). Vom avea atunci, ρ fiind abscisa punctului transformat al lui z_2,

$$\int_0^{\rho} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}, \tag{22}$$

care dă distanța neeuclidiană între cele două puncte 0 și ρ.

Dar, în membrul al doilea din (22), cantitatea de sub logaritm este raportul anarmonic $(-1, 0, \rho, +1)$ al celor patru puncte de pe diametrul lui $|z| = 1$ interceptat de axa reală. Acest raport, fiind un invariant al întregului grup (9) [deci și al lui (19)] putem scrie, pentru *distanța neeuclidiană între* z_1 *și* z_2 $\left(\text{lăsînd de o parte factorul numeric } \frac{1}{2}\right)$,

$$\text{dist.}\,(z_1, z_2) = \ln (\alpha, z_1, z_2, \beta) = \ln \frac{z_1-\beta}{z_1-\alpha} \cdot \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}, \tag{23}$$

unde α și β sînt punctele în care dreapta neeuclidiană ce trece prin z_1 și z_2 taie circumferința $|z| = 1$.

În mod analog se tratează și cazul transformărilor reale ale semiplanului.

Se verifică ușor că această distanță satisface axiomele obișnuite de simetrie și de aditivitate. Dacă $z_1 = z_2$, ea se reduce la zero și dacă, z_1 rămînînd fix, z_2 tinde către β, ea tinde către ∞, ceea ce corespunde cu rolul de ∞ pe care-l joacă $|z| = 1$.

Să observăm că este necesar ca raportul anarmonic să fie cel luat în ordinea indicată, altfel logaritmul nu ar mai fi pozitiv.

Pentru elementul de arie neeuclidiană, se poate lua invariantul

$$\frac{d\omega}{(1-|z|^2)^2} \quad \text{sau} \quad \frac{d\omega}{y^2},$$

după cum considerăm cazul cercului sau al axei reale, $d\omega$ fiind elementul de arie euclidian.

19. Cu aceste noțiuni se construiește toată geometria lui Lobacevski în reprezentarea lui Poincaré.

Putem, de exemplu, verifica ușor că suma unghiurilor dintr-un triunghi este, în geometria lui Lobacevski, întotdeauna $< \pi$. Într-adevăr, dacă aplicăm triunghiului oarecare din $|z| < 1$ o deplasare neeuclidiană care să ducă unul din vîrfurile sale în $z = 0$, două laturi devin drepte euclidiene trecînd prin $z = 0$, iar a treia un arc de cerc ortogonal lui $|z| = 1$. Cum unghiurile neeuclidiene au aceeași valoare cu cele euclidiene, rezultatul apare numaidecît.

Printre deplasările neeuclidiene (19) se află transformări eliptice, parabolice și hiperbolice. Primele, lăsînd invariant cercul $|z| = 1$, au punctele lor fixe simetrice față de acest cerc. Fie α punctul fix interior lui $|z| < 1$

al unei astfel de transformări eliptice. Atunci $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ este simetricul său; toate cercurile ortogonale la cercurile care trec prin α și $\frac{1}{\alpha}$ sînt lăsate invariante de transformare, care este o «rotație» neeuclidiană. Punctul α este centrul neeuclidian al cercurilor invariante.

Transformările parabolice din (19) au punctul lor fix α pe $|z| = 1$. Ele lasă invariante cercurile interioare lui $|z| \leqslant 1$ tangente la $|z| = 1$ în α, iar familia cercurilor ortogonale acestora, care formează o familie de drepte neeuclidiene paralele, rămîne invariantă prin transformarea parabolică, care este deci o «translație» neeuclidiană.

Tot astfel, transformările (19) hiperbolice lasă invariantă o familie de drepte neeuclidiene nesecante. Avem deci aici tot un fel de translație neeuclidiană, care nu mai are însă echivalent în geometria euclidiană.

Tot astfel se constată cu ușurință că un cerc neeuclidian Γ este un cerc euclidian. Pentru a arăta aceasta, este suficient să-i aplicăm lui Γ o deplasare care-i duce centrul în $z = 0$. Distanțele neeuclidiene păstrîndu-se, ajungem la un cerc euclidian. Dar centrul neeuclidian al lui Γ nu coincide cu centrul său euclidian; el este un punct din interiorul lui Γ astfel încît simetricul său față de $|z| = 1$ coincide cu simetricul său față de Γ.

Nu vom împinge mai departe aceste considerații. Ele ajung ca să arate că geometria lui Lobacevski se poate dezvolta complet pe această cale. Vom da însă o aplicație importantă a noțiunii de distanță neeuclidiană.

20. Generalizarea lemei lui Schwarz. Lema lui Schwarz de la sfîrșitul capitolului II capătă o interpretare geometrică remarcabilă, care-i arată adevăratul ei sens, dacă ne folosim de noțiunea introdusă mai sus de distanță neeuclidiană dintre două puncte z_1 și z_2, distanță pe care o vom nota cu $\delta(z_1, z_2)$.

Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în $|z| < 1$ și $|f(z)| < 1$.

Fie z_1 și z_2 două puncte oarecare, distincte, în $|z| < 1$ și u_1 și u_2 imaginile lor respective în (u) prin $u = f(z)$.

Vom arăta că *oricare ar fi* z_1 *și* z_2, *avem*

$$\delta(u_1, u_2) \leqslant \delta(z_1, z_2), \tag{24}$$

distanța neeuclidiană fiind luată în raport cu cercurile $|z| \leqslant 1$ *și* $|u| \leqslant 1$, *respectiv.*

În plus, dacă în (24) *egalitatea are loc pentru o pereche* z_1, z_2, *funcția* $f(z)$ *este o transformare liniară, care transformă pe* $|z| \leqslant 1$ *în* $|u| \leqslant 1$ (și deci egalitatea are loc pentru *orice pereche de puncte* z_1, z_2 *din* $|z| < 1$).

Să aplicăm variabilelor z și u, în cercurile unitate * respective, transformările care conservă aceste cercuri

$$Z = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}, \quad U = \frac{u - u_1}{1 - \bar{u}_1 u}. \tag{25}$$

* Se numește *cerc unitate* din planul (z) cercul $|z| \leqslant 1$.

Transformarea $u = f(z)$ va deveni

$$U = F(Z),$$

cu $F(Z)$ olomorfă în $|Z| < 1$, cu $|F(Z)| < 1$ și cu $F(0) = 0$.

Putem deci aplica lui $F(Z)$ lema lui Schwarz și obținem

$$|F(Z)| = |U| \leqslant |Z|. \tag{26}$$

În particular, dacă U_2 și Z_2 sînt valorile din membrii întîi (25), pentru $u = u_2$ și $z = z_2$, vom avea deci

$$|U_2| \leqslant |Z_2|, \tag{27}$$

ceea ce înseamnă că distanța euclidiană între 0 și Z_2 este cel puțin egală cu distanța euclidiană între 0 și U_2. Dar expresia lui $\delta(0, Z_2)$, (§ 18), ne arată îndată că distanța neeuclidiană crește și descrește împreună cu distanța euclidiană între 0 și Z_2. Deci (27) permite să scriem

$$\delta(0, U_2) \leqslant \delta(0, Z_2). \tag{28}$$

Cum δ este invariant pentru transformările (25), aceasta ne dă

$$\delta(u_1, u_2) \leqslant \delta(z_1, z_2),$$

adică prima parte a propoziției enunțate.

Dacă egalitatea are loc pentru perechea z_1, z_2, aceasta are loc și pentru (28), deci pentru (27). Atunci, conform părții a doua a lemei lui Schwarz, avem

$$F(Z) = e^{\theta i} Z$$

și deci $u = f(z)$ este transformare liniară care transformă pe $|z| \leqslant 1$ în $|u| \leqslant 1$.

Se poate spune deci că transformarea $u = f(z)$, cu condițiile enunțului de mai sus, *scurtează* distanța neeuclidiană între două puncte; ea nu o lasă invariantă decît dacă transformarea aparține grupului (19). (Teorema lui Pick.)

21. Ca aplicație a acestui rezultat, să ne propunem o problemă de interpolare, anume să determinăm toate funcțiile olomorfe în $|z| < 1$, de modul < 1, care iau, în anumite puncte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ din $|z| < 1$, anumite valori date $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Pe lîngă condiția evidentă $|u_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, mai sînt necesare, conform paragrafului precedent, și următoarele condiții:

$$\delta(u_k, u_h) \leqslant \delta(z_k, z_h) \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{29}$$

În cazul $n = 2$, condițiile (29) se reduc la una singură

$$\delta(u_1, u_2) \leqslant \delta(z_1, z_2). \tag{30}$$

Vom arăta că, în acest caz, ea este și suficientă.

Dacă efectuăm și aici transformările (25) asupra soluției $u = f(z)$, presupusă cunoscută, obținem

$$U = F(Z), \tag{31}$$

cu $\qquad |F(Z)| < 1, \quad F(0) = 0 \quad$ și $\quad F(Z_2) = U_2.$

Avem, așadar,

$$U = F(Z) = Z\Phi(Z),$$

cu $\Phi(Z)$ olomorfă, $|\Phi(Z)| < 1$ în $|Z| < 1$ și cu $\Phi(Z_2) = \frac{U_2}{Z_2}$. Este clar că, orice funcție $\Phi(Z)$, de modul < 1 în $|Z| < 1$, olomorfă în acest cerc și luînd valoarea $\frac{U_2}{Z_2}$ în Z_2, va da o soluție pentru $F(Z)$ și deci pentru $f(z)$. Or, există o infinitate de asemenea funcții dacă în (30) avem inegalitatea, adică dacă $\left|\frac{U_2}{Z_2}\right| < 1$. Aceasta se vede ducînd, printr-o transformare liniară din grupul (19), pe $\frac{U_2}{Z_2}$ în origine, ceea ce reduce problema la găsirea unei funcții olomorfe și mărginite în $|Z| < 1$, care se anulează în $Z = 0$.

Dacă în (30) avem egalitate, atunci $|U_2| = |Z_2|$ și $F(Z)$ este de forma $e^{\theta i} Z$, astfel încît $\Phi(Z) \equiv 1$ și nu avem decît o singură soluție.

Cazul general n se tratează reducîndu-l la cazul $n - 1$.

Să arătăm, numai pentru $n = 3$, că, în acest caz, condițiile (29) nu mai sînt suficiente.

Efectuînd aceeași transformare (25), vom avea funcția din (31), care va necesita determinarea lui $\Phi(Z)$ cu condițiile:

1° $|\Phi(Z)| < 1$ și olomorfă în cercul $|Z| < 1$;

2° $\Phi(Z_2) = \frac{U_2}{Z_2}$ și $\Phi(Z_3) = \frac{U_3}{Z_3}$.

Pentru ca aceste condiții să poată fi satisfăcute, trebuie — și am văzut că este suficient — ca

$$\delta\left(\frac{U_2}{Z_2}, \frac{U_3}{Z_3}\right) \leqslant \delta(Z_2, Z_3) \tag{32}$$

care se exprimă, în funcție de u_1, u_2, u_3, z_1, z_2, z_3, cu ajutorul lui (25). Problema este astfel redusă la cazul $n = 2$.

Dar la condițiile (29) trebuie adăugată condiția (32). Numărul condițiilor ce trebuie adăugate condiției (29) se mărește cu n.

III. TEORIA LUI CAUCHY

22. Noțiunea de funcție monogenă (§ 1), introdusă de Cauchy, nu-și dovedește toată fecunditatea ei decît dacă introducem și integrala unei funcții de variabilă complexă, luată pe un drum continuu din planul (z) *. Este deci necesar să începem prin definirea unei asemenea integrale.

Un drum continuu (cap. I, § 21) este o mulțime C, ordonată, definită prin $z = x(t) + iy(t)$, unde $x(t)$ și $y(t)$ sînt funcții continue de variabila

* A. L. Cauchy, *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, Paris, 1825.

reală t, pe segmentul * $[a, b]$. Vom desemna prin z_k și z_k' valorile complexe ale lui z, corespunzătoare respectiv lui $t = t_k$ și $t = t_k'$.

Un șir finit de valori t_k, crescătoare cu k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), în care $t_0 = a$ și $t_n = b$, va fi desemnat prin $\{t\}$ și se va numi o *diviziune* a lui $[a, b]$. Orice altă diviziune $\{t'\}$ a lui $[a, b]$ care cuprinde toate valorile t_k ale primei diviziuni și alte valori în plus se va numi *subdiviziune* a lui $\{t\}$.

Dacă $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ este o funcție definită și continuă pe C, ea este și funcție continuă de t pe $[a, b]$.

Dacă însemnăm prin $\mu(\delta)$ maximul lui $|f(z_1) - f(z_2)|$, cînd t_1 și t_2 sînt două valori oarecare de pe $[a, b]$, cu $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$, continuitatea lui f, ca funcție de t, implică $\lim_{\delta \to 0} \mu(\delta) = 0$.

În sfîrșit, să mai reamintim că C se numește curbă *rectificabilă* dacă mulțimea numerelor pozitive

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$$

care corespund tuturor diviziunilor lui $[a, b]$ este mărginită superior.

Marginea superioară L se numește *lungimea lui C*.

23. Integrala în lungul unei curbe rectificabile C. Fiecărei diviziuni $\{t\}$ a lui $[a, b]$ să facem să-i corespundă un număr complex definit prin suma

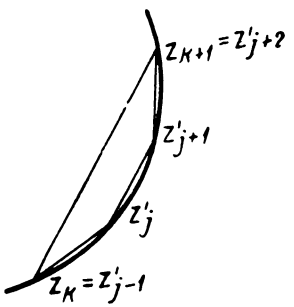


Fig. 7

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k). \tag{33}$$

Fie $\{t'\}$ o subdiviziune a lui $\{t\}$ (fig. 7) și suma corespunzătoare

$$S' = \sum_{j=0}^{m-1} f(z'_j)(z'_{j+1} - z'_j) \quad (m > n). \tag{34}$$

Dacă în (33) înlocuim diferența $z_{k+1} - z_k$ cu suma diferențelor $z'_{j+1} - z'_j$, formate cu punctele z'_j, cuprinse între z_k și z_{k+1} pe C, suma (33) se poate scrie

$$S = \sum_{j=0}^{m-1} f(z_{k_j})(z'_{j+1} - z'_j), \tag{33'}$$

unde $t_{k_j} \leqq t'_j < t_{k_j+1}$.

Din (33') și (34) deducem atunci

$$S' - S = \sum_{i=0}^{m-1} [f(z'_j) - f(z_{k_j})](z'_{j+1} - z'_j) \tag{35}$$

și deci, dacă $|t_{k+1} - t_k| \leqslant \delta$, și L este lungimea arcului rectificabil C,

$$|S' - S| \leqslant \mu(\delta) \cdot L. \tag{36}$$

* Un segment este un interval închis.

24. Să considerăm acum un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$

$$\{t^{(1)}\}, \{t^{(2)}\}, \ldots, \{t^{(h)}\}, \ldots, \tag{37}$$

fiecare $\{t^{(h+1)}\}$ fiind subdiviziune a lui $\{t^{(h)}\}$, iar maximul $\delta^{(h)}$ al intervalelor lui $\{t^{(h)}\}$ tinzînd către zero cu $1/h$. Vom avea, după (36), pentru $h' > h$

$$|S^{(h')} - S^{(h)}| \leqslant \mu(\delta^{(h)}) \cdot L.$$

Șirul sumelor

$$S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(h)}, \ldots \tag{38}$$

este deci convergent.

Fie $I = \lim_{h \to \infty} S^{(h)}$.

Această limită I este independentă de șirul de diviziuni ales în condițiile lui (37).

Într-adevăr, fie $\{t\}$ și $\{t'\}$ două diviziuni oarecare ale lui $[a, b]$, din care nici una nu este o subdiviziune a celeilalte, și $\{t''\}$ diviziunea formată cu toate valorile t_k și t'_j ale lui $\{t\}$ și $\{t'\}$.

$\{t''\}$ este subdiviziune atît a lui $\{t\}$ cît și a lui $\{t'\}$. Dacă S, S' și S'' sînt sumele (33) respective și δ, δ' respectiv maximele intervalelor lui $\{t\}$ și $\{t'\}$, avem, după (36),

$$|S'' - S| \leqslant \mu(\delta) \cdot L \quad \text{și} \quad |S'' - S'| \leqslant \mu(\delta') \cdot L$$

și deci,

$$|S' - S| \leqslant |S'' - S| + |S' - S''| \leqslant [\mu(\delta) + \mu(\delta')] \cdot L.$$

Deci, dacă intervalele a două diviziuni oarecare $\{t\}$ și $\{t'\}$ ale lui $[a, b]$ sînt suficient de mici, $|S' - S|$ este oricît de mic vrem. Aceasta înseamnă că, dacă I și I' sînt limitele a două șiruri (37) oarecare, $I - I'$ este mai mic decît orice cantitate $\varepsilon > 0$ dată, și, cum I și I' sînt constante, că $I = I'$. Valoarea aceasta comună I, pentru toate șirurile (37), se numește *integrala lui* $f(z)$ *în lungul lui* C și se înseamnă

$$I = \int_C f(z)\, dz.$$

O b s e r v a ț i e. După definiția integralei, se vede că ea se reduce la două *integrale reale curbilinii* luate pe C și că avem, scriind $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$,

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C P(x, y)\, dx - Q(x, y)\, dy + i \int_C Q(x, y)\, dx + P(x, y)\, dy.$$

25. Integrala astfel definită posedă, după cum se deduce îndată din definiția ei prin sumele (33), următoarele două proprietăți de aditivitate, ca și integrala reală:

1° Dacă $C = C_1 + C_2$, adică dacă C este format din cele două arce rectificabile C_1 și C_2, așezate capăt la capăt, iar $f(z)$ este o funcție continuă pe reuniunea acestor arce, avem

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

2° Dacă $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ și funcțiile f_1 și f_2 sînt fiecare continue pe C, avem

$$\int_C f_1(z)\,dz + \int_C f_2(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

De asemenea, oricare ar fi constanta k, avem $\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$.

26. Limitarea modulului integralei. Fie $f(z)$ o funcție continuă pe curba rectificabilă C de lungime L și fie $|f(z)| \leqslant M$ pe C.

Din definiția integralei prin sumele (33) se deduce îndată o limitare superioară pentru modulul integralei lui $f(z)$ în lungul lui C. Avem, pentru termenii șirului (38),

$$S^{(h)} = \sum_{k=0}^{n_h - 1} f(z_k)\,(z_{k+1} - z_k),$$

în care n_h crește la infinit cu h. Deci,

$$|S^{(h)}| \leqslant M \cdot \sum_{k=0}^{n_h - 1} |z_{k+1} - z_k| \leqslant M \cdot L,$$

de unde

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \lim_{h \to \infty} |S^{(h)}| \leqslant M \cdot L.$$

Limitarea aceasta, care nu face uz decît de marginea superioară a lui $|f(z)|$ pe C și de lungimea L a lui C, ne va fi foarte utilă în cele ce vor urma. Ea este cu totul analogă limitării corespunzătoare a integralelor reale, lungimea L luînd aici locul lungimii intervalului de integrare.

27. Teorema fundamentală a lui Cauchy. Nu am făcut pînă acum nici o altă ipoteză decît continuitatea asupra lui $f(z)$. Mai mult decît atît, nici nu am presupus definită funcția $f(z)$ decît pe curba C. De aici înainte vom considera funcții $f(z)$ monogene *într-un domeniu* D și vom trage consecințe din această proprietate.

Teorema fundamentală a lui Cauchy, relativă la integrala unei funcții monogene, pe care o vom da acum, a fost demonstrată mai întîi presupunînd nu numai monogenitatea funcției, așa cum am definit-o (§ 1), dar și continuitatea derivatei ei. În anul 1900, E. Goursat a arătat că ipoteza continuității derivatei nu este necesară și că teorema rezultă chiar din monogenitatea funcției, adică chiar numai din existența derivatei în D, fără altă ipoteză asupra ei. Demonstrația pe care o vom da aici reprezintă o

simplificare, datorită mai multor matematicieni, a demonstrației inițiale date de E. G o u r s a t, păstrîndu-se însă ideile ei esențiale.

28. Să considerăm un triunghi oarecare T, așezat în întregime într-un domeniu D, în care $f(z)$ este monogenă.

Fie C conturul acestui triunghi. Vom arăta că avem

$$I = \int_C f(z)\, dz = 0. \tag{39}$$

Pentru aceasta, să împărțim triunghiul T în patru triunghiuri egale $T_1^{(k)} (k = 1, 2, 3, 4)$, ducînd paralele la fiecare din laturile lui T, care împart în două părți egale celelalte două laturi. Dacă însemnăm prin $I_1^{(k)}$ integralele analoge cu (39) luate pe contururile triunghiurilor $T_1^{(k)}$, toate în același sens (care este cel indicat pe figura 8 pentru T), vom avea

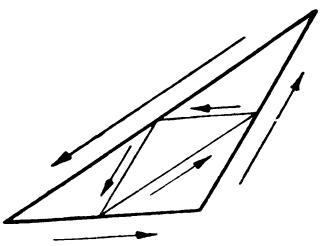


Fig. 8

$$I = \sum_{k=1}^{4} I_1^{(k)}, \tag{40}$$

deoarece integralele luate pe laturile lui $T_1^{(k)}$, interioare lui T, se anulează două cîte două, fiind luate în sens contrar la fiecare din cele două triunghiuri $T_1^{(k)}$ pentru care ele sînt laturi comune.

Din (40) se deduce

$$|I| \leqslant \sum_{k=1}^{4} |I_1^{(k)}|.$$

Se vede de aici că una din cantitățile $I_1^{(k)}$ cel puțin, fie I_1, satisface inegalitatea

$$|I| \leqslant 4\,|I_1|.$$

Să desemnăm prin T_1 triunghiul $T_1^{(k)}$ corespunzător lui I_1.

Dacă operăm asupra triunghiului T_1, exact cum am operat asupra lui T, vom obține un triunghi T_2 și o integrală I_2 corespunzătoare, și vom avea

$$|I_1| \leqslant 4\,|I_2|.$$

Continuînd astfel, vom obține un șir de triunghiuri

$$T \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots \supset T_n \supset \ldots \tag{41}$$

cuprins fiecare în precedentul, toate asemenea între ele, iar perimetrul lor tinzînd către zero cu $1/n$.

Dacă L este perimetrul lui T și L_n perimetrul lui T_n, avem evident

$$L = 2^n \cdot L_n, \tag{42}$$

iar între I și integralele I_n, corespunzătoare triunghiurilor T_n, inegalitățile

$$|I| \leqslant 4|I_1| \leqslant 4^2|I_2| \leqslant \ldots \leqslant 4^n|I_n|. \tag{43}$$

Dacă în fiecare triunghi T_n din (41) alegem acum un punct P_n (fie de exemplu punctul de întîlnire al medianelor), mulțimea punctelor P_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) are un punct de acumulare, care va fi cuprins în fiecare din triunghiurile T_n. Fie z_0 acest punct *. În z_0, care este în T, deci în D, funcția $f(z)$ are o derivată, fie $f'(z_0)$, bine determinată și finită. Scriind

$$h(z, z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \tag{44}$$

avem deci

$$\lim_{z \to z_0} h(z, z_0) = 0. \tag{45}$$

Prin urmare, ținînd seama de (44), și C_n fiind conturul lui T_n,

$$I_n = \int_{C_n} f(z)\,dz = \int_{C_n} f(z_0)\,dz + \int_{C_n} (z - z_0) f'(z_0)\,dz + \int_{C_n} (z - z_0) h(z, z_0)\,dz. \tag{46}$$

Or, primele două integrale din ultimul membru sînt nule.

Într-adevăr, din însăși definiția integralei se vede că

$$\int_{C_n} f(z_0)\,dz = f(z_0) \int_{C_n} dz = 0$$

deoarece C_n fiind un contur închis, sumele (33), care se reduc aici la

$$\sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k),$$

sînt toate nule.

În ceea ce privește integrala

$$\int_{C_n} (z - z_0) f'(z_0)\,dz,$$

ea este, după cele de mai sus, egală cu

$$\int_{C_n} z f'(z_0)\,dz = f'(z_0) \int_{C_n} z\,dz.$$

Or, dacă a_1, a_2, a_3 sînt afixele vîrfurilor lui T_n, se verifică îndată, înlocuind z cu $x + iy$ și dz cu $dx + i dy$, că ultima integrală pe latura $\overline{a_k a_j}$ este egală cu $\frac{a_k^2 - a_j^2}{2}$ **.

---

* z_0 este de altfel singurul punct comun tuturor T_n, pentru că laturile lui T_n tind către 0 cu $1/n$.

** A se vedea observația de la § 24. Integralele curbilinii corespunzătoare (aici rectilinii) se calculează elementar.

Făcînd suma integralelor pe cele trei laturi, parcurse succesiv, se obține zero.

Din (46) rămîne atunci

$$I_n = \int_{C_n} (z - z_0)\, h(z, z_0)\, dz.$$

Dar, din inegalitatea din § 26, care limitează modulul integralei, avem

$$|I_n| \leqslant L_n^2 \cdot \varepsilon_n,$$

unde ε_n este maximul lui $|h(z, z_0)|$ în T_n.

Într-adevăr, lungimea lui C_n este L_n, iar $|z - z_0| < L_n$ cînd z este pe C_n.

Dar, dacă ținem seama de (42), aceasta se mai poate scrie

$$|I_n| \leqslant \frac{L^2}{4^n} \cdot \varepsilon_n$$

și din cauza inegalităților (43)

$$|I| \leqslant 4^n |I_n| \leqslant L^2 \cdot \varepsilon_n.$$

Dar (45) arată că $\lim \varepsilon_n = 0$ pentru $n \to \infty$. Cum I nu depinde de n, aceasta înseamnă că

$$I = \int_C f(z)\, dz = 0,$$

adică ceea ce aveam de demonstrat.

29. Să considerăm acum în D un drum continuu C oarecare, definit ca în § 22 prin

$$z = z(t) = x(t) + iy(t).$$

Cînd variabila reală t descrie, crescînd, segmentul de dreaptă $[a, b]$ de la a la b, punctul $z(t)$ descrie drumul C de la z_a la z_b.

Imaginea K în (z) a drumului C este compactă* și poate fi deci acoperită cu un număr finit de cercuri Γ. Vom numi o astfel de acoperire, acoperire (Γ) dacă:

1° toate cercurile Γ sînt cuprinse în întregime în D;

2° fiecare $z \in K$ este interior cel puțin unui Γ;

3° orice Γ conține puncte $z \in K$.

Vom arăta că fiecare acoperire (Γ) poate fi *ordonată relativ la* C, adică se pot atribui cercurilor Γ respective indici întregi pozitivi $1, 2, \ldots, p$, astfel încît drumul continuu C să treacă succesiv prin cercurile Γ_h $(h = 1, 2, \ldots, p)$, în ordinea indicilor crescători.

Într-o asemenea ordonare se va putea întîmpla de altfel ca doi h diferiți să corespundă unui același Γ sau ca unii Γ să nu figureze printre Γ_h.

---

* Ca imagine continuă a mulțimii compacte $[a, b]$. Reamintim că această imagine K nu trebue confundată cu drumul continuu C, care implică și o *ordonare* a punctelor lui K, ordonare definită prin corespondența $z = z(t)$.

Fie $[a, \alpha]$ un segment $(\alpha > a)$ pe $[a, b]$, astfel încît pentru orice $t \in [a, \alpha]$ punctul $z(t)$ să fie interior unui cerc din (Γ), care cuprinde pe z_a, și fie $[\beta, b]$ un segment analog $(\beta < b)$ pentru z_b.

Segmentul $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ poate fi acoperit cu un număr finit de segmente σ_j, astfel încît toate punctele $z(t)$, unde $t \in \sigma_j$, să se găsească în interiorul unui același Γ_j, din (Γ).

Într-adevăr, t fiind un punct oarecare din $[\alpha, \beta]$, se poate găsi un astfel de segment conținînd pe t, iar $[\alpha, \beta]$ fiind compact, teorema lui Borel și Lebesgue (cap. I) permite extragerea unui număr finit de segmente σ_j din acestea.

Să adăugăm la segmentele extrase cele două segmente $[a, \alpha]$ și $[\beta, b]$ și să desemnăm toate aceste segmente (în număr finit) prin σ_j.

Orice punct de pe $[a, b]$ va fi deci interior unui σ_j, în afară de a și de b, care vor constitui fiecare cîte o extremitate a unor segmente σ_j (segmentele $[a, \alpha]$ și $[\beta, b]$).

Putem presupune că nici un σ_j nu este cuprins în alt σ_j, deoarece, dacă aceasta ar fi cazul, putem suprima pe σ_j interior.

Să schimbăm acum indicii astfel încît, dacă $h' > h$, segmentul $\sigma_{h'}$ să aibă puncte în afara lui σ_h și la dreapta lui. Aceasta se poate face ușor: σ_1 va fi $[a, \alpha]$, σ_2 un σ_j care cuprinde extremitatea dreaptă a lui σ_1 în interior, σ_3 un σ_j care cuprinde extremitatea dreaptă a lui σ_2 în interior și așa mai departe. Astfel, a va fi extremitatea stîngă a lui σ_1, iar b extremitatea dreaptă a lui σ_p, adică a segmentului σ_h cu indicele cel mai mare.

O asemenea ordonare a segmentelor σ_h după indicii crescători ordonează cercurile Γ astfel încît drumul C, care își are extremitățile sale z_a și z_b respectiv în σ_1 și σ_p, va trece din Γ_1 în Γ_2, din Γ_2 în Γ_3 etc., terminîndu-se în Γ_p, dacă notăm cu Γ_h unul din cercurile Γ în care se află toate punctele $z(t)$, cînd t este în σ_h.

Ordonarea (Γ_h) constituie o *ordonare relativă la* C.

30. Să numim acum C' orice alt drum avînd aceleași extremități ca și C și care trece și el, succesiv, din Γ_1 în Γ_2, din Γ_2 în Γ_3 etc., terminîndu-se în Γ_p, întocmai ca și C. Ordonarea (Γ_h) $(h = 1,2,\ldots,p)$ este totodată o ordonare relativă la C și la C'.

Printre drumurile C' există linii poligonale cu vîrfurile pe C. Vom arăta anume că dacă C, acoperirea (Γ) și o ordonare (Γ_h) a cercurilor din (Γ) relativă la C sînt date, există un $\varepsilon > 0$, astfel încît orice șir finit de valori

$$a,\ t_1,\ t_2,\ldots,t_k,\ t_{k+1},\ \ldots,t_{q-1},\ b, \tag{47}$$

în care avem (cu $t_0 = a$ și $t_q = b$),

$$\max_{k=0,1,\ldots,q-1} [t_{k+1} - t_k] < \varepsilon,$$

dă naștere la o linie poligonală cu vîrfurile succesive

$$z_a,\ z(t_1),\ z(t_2),\ldots,z(t_k),\ z(t_{k+1}),\ldots,z(t_{q-1}),\ z_b,$$

care este un drum C'.

Este suficient să considerăm segmentele σ_h de pe $[a, b]$, care au definit ordonarea (Γ_h) relativă la C, extremitățile lor în ordinea absciselor crescătoare

$$a, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_{s-1}, b$$

și să luăm (cu $\tau_0 = a$ și $\tau_s = b$) pentru ε valoarea

$$\varepsilon = \min_{k=0,1,\ldots,s-1} [\tau_{k+1} - \tau_k].$$

Atunci, două puncte $z(t_k)$ succesive se vor găsi întotdeauna într-un același Γ_h, împreună cu întreg segmentul de dreaptă care le unește, iar trecerea liniei poligonale de la un Γ_h la cel următor se va face în ordinea indicilor crescători, ca și pentru C.

Rezultă de aici, că, fiind date două acoperiri (Γ) distincte, ordonate relativ la același C, există un ε astfel încît, dacă în (47) avem

$$\max (t_{k+1} - t_k) < \varepsilon,$$

linia poligonală cu vîrfurile succesive $z(t_k)$ este un drum C', *pentru ambele acoperiri* (Γ) *și pentru ordonările lor relative la* C.

31. Acest din urmă rezultat ne va servi pentru a ataşa fiecărui drum continuu C, și fiecărei funcții $f(z)$ monogene în $D \supset C$, un număr $J(C)$ care, *în cazul cînd* C *este rectificabil, se va reduce la integrala lui* $f(z)$ *luată pe* C.

Vom arăta mai întîi, că, dacă π_1 și π_2 sînt linii poligonale C pentru o aceeași ordonare (Γ_h) relativă la C, avem

$$\int_{\pi_1} f(z)\, dz = \int_{\pi_2} f(z)\, dz.$$

Egalitatea aceasta revine la faptul că integrala luată pe linia poligonală închisă $\pi_1 - \pi_2$, formată din π_1, parcursă dela z_a la z_b, urmată de π_2, parcursă dela z_b la z_a este nulă.

După cum se vede îndată din figura 9 (introducînd laturile ajutătoare figurate punctat), integrala

$$\int_{\pi_1 - \pi_2} f(z)\, dz$$

se descompune într-o sumă finită de integrale luate pe anumite linii poligonale închise, fiecare așezată în întregime în *interiorul unui același cerc* Γ_h.

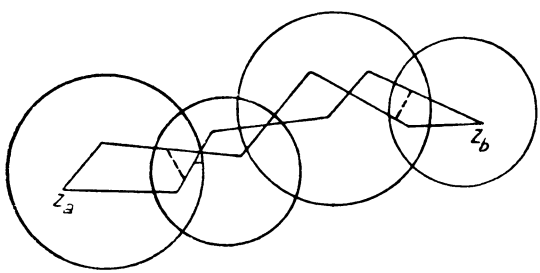


Fig. 9

Or, o asemenea integrală se reduce treptat, printr-un număr finit de operații, la o integrală luată pe conturul unui triunghi din același cerc, integrală care este nulă, după cum am văzut. Va ajunge pentru aceasta să înlocuim

de fiecare dată două laturi avînd un vîrf comun, prin segmentul care unește celelalte două extremități ale acestor laturi. Numărul laturilor se va reduce astfel, treptat, cu cîte o unitate. Integrala luată pe linia poligonală închisă este deci nulă.

Toate integralele

$$\int_{\pi} f(z)\, dz \tag{48}$$

luate pe oricare din liniile poligonale π, care sînt drumuri C' pentru o ordonare (Γ_h) relativă la C, au deci aceeași valoare.

Dar, după cum am văzut la sfîrșitul paragrafului precedent, două acoperiri (Γ) oarecare, cu ordonări oarecare relative la același C fiind date, există întotdeauna o linie poligonală care este simultan un drum C' pentru ambele ordonări. Rezultă de aici că, pentru o funcție $f(z)$ dată, valoarea integralei (48) nu depinde de acoperirea Γ și de ordonarea ei, ci depinde numai de C. Vom scrie deci

$$J(C) = \int_{\pi} f(z)\, dz,$$

π fiind relativ la o acoperire (Γ) oarecare și o ordonare oarecare a ei relativă la C.

32. Dacă C este un drum *rectificabil*, avem

$$J(C) = \int_{C} f(z)\, dz.$$

Fie într-adevăr π linia poligonală cu vîrfurile pe C

$$z_a,\ z(t_1),\ z(t_2), \ldots, z(t_k), \ldots, z_b$$

și corespunzătoare lui (47) .

Integrala

$$\int_{\pi} f(z)\, dz$$

diferă de

$$S = \sum_k f(z_k)\ (z_{k+1} - z_k),$$

unde am pus

$$z_k = z(t_k),$$

printr-o cantitate, al cărei modul poate fi făcut oricît de mic vrem, dacă luăm pe ε din (47) destul de mic.

Într-adevăr, pe fiecare latură $\overline{z_k\, z_{k+1}}$ a liniei poligonale π, putem scrie

$$\int_{\overline{z_k\, z_{k+1}}} f(z)\, dz = \lim_{|z_{j+1} - z_j| \to 0} \sum_j f(z_j)\ (z_{j+1} - z_j),$$

unde z_j sînt puncte de pe $\overline{z_k z_{k+1}}$, mergînd de la z_k la z_{k+1}, cu j crescînd.

Pe de altă parte, avem

$$f(z_k)\,(z_{k+1}-z_k) = f(z_k)\sum_j (z_{j+1}-z_j) = \sum_j f(z_k)\,(z_{j+1}-z_j).$$

Deci

$$\sum_k f(z_k)\,(z_{k+1}-z_k) - \sum_k \int_{z_k z_{k+1}} f(z)\,dz = S - \int_\pi f(z)\,dz =$$

$$= \sum_k \lim_{|z_{j+1}-z_j|\to 0} \sum_j [f(z_k) - f(z_j)]\,(z_{j+1}-z_j)$$

și, prin urmare,

$$\left| S - \int_\pi f(z)\,dz \right| \leqslant \eta \sum_k |z_{k+1}-z_k| \leqslant \eta L, \tag{49}$$

unde L este lungimea lui C, iar

$$\eta = \max_{z\in \overline{z_k z_{k+1}}} |f(z_k) - f(z)|.$$

Cum $f(z)$ este continuă de z, iar $z(t)$ este continuă de t pe $[a, b]$, cantitatea η poate fi făcută oricît de mică, dacă ε este luat destul de mic. Inegalitatea (49) arată atunci că

$$J(C) = \int_\pi f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz,$$

deoarece pentru $\varepsilon \to 0$ și $S \to \int_C f(z)\,dz$.

33. Înțelegem prin *deformare continuă a lui* C, în D (cu extremitățile fixe), o funcție

$$z = z(t, \lambda)$$

de variabilele reale t și λ, definită și continuă în dreptunghiul R_0

$$R_0 \begin{cases} a \leqslant t \leqslant b \\ \lambda_0 - \delta \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0 + \delta. \end{cases}$$

care funcție satisface condițiile

1° $z(t, \lambda) \in D$, cînd punctul (t, λ) este în R_0,

2° $z(t, \lambda_0) \equiv z(t)$, care definește pe C

3° $z(a, \lambda) = z_a$, $z(b, \lambda) = z_b$, oricare ar fi λ cu $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$.

Se vede cu ușurință că, dacă $|\lambda - \lambda_0|$ este suficient de mic, toate drumurile continue C_λ definite prin $z = z(t, \lambda)$ sînt drumuri C' (în sensul din § 30), pentru o ordonare dată relativă la C a acoperirii (Γ).

Într-adevăr, pe fiecare din segmentele σ_h de pe $[a, b]$, care determină ordonarea (Γ_h) a cercurilor din (Γ), să construim în R_0 un dreptunghi $t \in \sigma_h$,

$|\lambda| \leqslant \eta_b$, cu η_b destul de mic, pentru ca, atunci cînd (t, λ) este în acest dreptunghi, $z(t, \lambda)$ să rămînă în interiorul lui Γ_b. Aceasta este posibil datorită continuității lui $z(t, \lambda)$ în R_0. Dacă η este cel mai mic din η_b, oricare din drumurile continue C_λ cu $|\lambda| < \eta$ este un drum C', deoarece el străbate cercurile Γ_b în aceeași ordine ca și C.

Avem pentru un asemenea C'

$$J(C) = J(C'). \tag{50}$$

Într-adevăr, fie π' și π linii poligonale cu vîrfurile respectiv pe C' și C și străbătînd cercurile Γ_b în aceeași ordine.

Raționamentul din § 31 (fig. 9) arată că avem

$$\int_{\pi'} f(z)\, dz = \int_{\pi} f(z)\, dz,$$

deoarece acest raționament nu presupune în nici un fel că vîrfurile liniilor poligonale ar fi pe același C. Rezultă egalitatea (50).

34. Să considerăm acum o deformare continuă în D a drumului C_0, definit prin $z = z_0(t)$, în drumul C_1, definit prin $z = z_1(t)$, deformare care lasă extremitățile z_0 și z_1 fixe. Aceasta înseamnă că există o funcție $z(t, \lambda)$, definită și continuă în dreptunghiul R,

$$R \begin{cases} a \leqslant t \leqslant b \\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \end{cases}$$

care funcție satisface condițiile:

1° $z(t, \lambda) \subset D$, cînd (t, λ) este în R.
2° $z(t, 0) \equiv z_0(t)$ și $z(t, 1) \equiv z_1(t)$.
3° $z(a, \lambda) = z_a$, $z(b, \lambda) = z_b$, oricare ar fi $\lambda \geqslant 0$ și $\leqslant 1$.

Fie C_λ drumul definit prin $z = z(t, \lambda)$, cu λ constant.

Din cele ce precedă, rezultă că $J(C_\lambda)$ este constant în vecinătatea lui λ, adică dacă λ este cuprins între $\lambda - \eta$ și $\lambda + \eta$, η fiind destul de mic.

Segmentul

$$\eta \leqslant \lambda \leqslant 1 - \eta' \qquad (\text{cu } \eta \text{ și } \eta' > 0) \tag{51}$$

poate fi acoperit cu segmente în care $J(C_\lambda)$ este constant; din ele se poate extrage un număr finit care acoperă (51).

Fie (α) aceste segmente extrase. Pe de altă parte, η și η' pot fi aleși, conform paragrafului precedent, astfel încît, în

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \eta, \tag{52}$$

ca și în

$$1 - \eta' \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{52'}$$

$J(C_\lambda)$ să fie *constant*.

Cum, în fiecare din segmentele (α) ca și în (52) și (52'), cantitatea $J(C_\lambda)$ este constantă, și cum segmentele acestea formează un lanț finit, mergînd

de la 0 la 1, două consecutive avînd întotdeauna puncte interioare comune, se vede că $J(C_\lambda)$ este *constant pe tot segmentul* $[0, 1]$ *și deci avem, în particular,*

$$J(C_0) = J(C_1).$$

Propoziția aceasta constituie teorema fundamentală a lui Cauchy sub forma ei generală.

35. Dacă D este astfel încît oricare ar fi C_0 și C_1 în D cu extremități comune, ele se pot deforma continuu unul în altul, în interiorul lui D, menținînd extremitățile fixe, se spune că D este cu *conexiune simplă**. Teorema lui Cauchy poate fi atunci formulată astfel:

Într-un domeniu cu conexiune simplă D, *integrala unei funcții* $f(z)$ *monogene în* D

$$\int_C f(z)\, dz,$$

luată pe un arc rectificabil oarecare $C \subset D$, *depinde numai de extremitățile lui* C.

36. Să considerăm o curbă închisă jordaniană C, rectificabilă, și astfel încît domeniul Δ mărginit de C să se afle, împreună cu frontiera sa C, așezat într-un domeniu D de monogenitate a funcției $f(z)$. Atunci, conform teoremei enunțate în capitolul I, § 22, dacă alegem două puncte oarecare z_0 și z_1 pe C, determinînd arcele C_0 și C_1 pe C $[C = C_0 + C_1]$, C_0 se poate deforma continuu în C_1 în interiorul lui Δ, deci în D. Avem, prin urmare,

$$\int_C = \int_{C_0} - \int_{C_1} = 0, \tag{53}$$

integralele din membrul al doilea fiind luate ambele de la z_0 la z_1.

Deci,

Integrala lui $f(z)$ *luată în lungul unei curbe simple închise rectificabile* C, *care se găsește așezată, împreună cu domeniul* Δ *pe care îl mărginește, într-un domeniu de monogenitate a funcției* $f(z)$ *este nulă.*

Aceasta este forma sub care se obișnuiește să se enunțe în general teorema lui Cauchy.

37. Să considerăm acum un domeniu Δ mărginit de $n + 1$ curbe simple închise rectificabile $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$. Putem presupune că $C_1, C_2, \ldots, C_n$, toate exterioare una alteia, sînt așezate, toate în interiorul lui C și că Δ este format din punctele interioare lui C, care sînt în același timp exterioare tuturor curbelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Atunci,

---

* Considerînd pentru $z(t, \lambda)$ de mai sus funcția

$$z(t, \lambda) = [x_0(t) + i\, y_0(t)](1 - \lambda) + [x_1(t) + i y_1(t)]\lambda,$$

se vede îndată că planul este un domeniu simplu conex. Se vede de asemenea, cu aceeași funcție $z(t, \lambda)$, că orice domeniu *convex* (adică astfel încît, dacă cuprinde punctele a și b, cuprinde și segmentul care le unește) este domeniu simplu conex.

Dacă Δ, împreună cu toate curbele sale frontieră sînt așezate într-un domeniu de monogenitate a lui $f(z)$, avem

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \ldots + \int_{C_n},$$

toate integralele fiind luate în sens direct pe curbele închise respective. Într-adevăr, să ducem arcele ajutătoare λ, λ_1, ..., λ_n, interioare lui Δ (fig. 10), care nu au decît extremitățile pe frontiera lui Δ și care unesc, respectiv, C cu C_1, C_1 cu C_2, și așa mai departe, λ_n unind C_n cu C. Se formează astfel două subdomenii Δ_1 și Δ_2 ale lui Δ, fiecare limitat de o singură curbă închisă și satisfăcînd fiecare condițiile din paragraful precedent. Să aplicăm lui Δ_1 și lui Δ_k, sub forma din § 36, teorema lui Cauchy. Adunînd relațiile (53) obținute și observînd că integralele luate în lungul arcelor λ_k se distrug două cîte două, fiind luate în sens invers, după cum λ_k este considerat parte din conturul lui Δ_1 sau al lui Δ_2, se obține relația de mai sus. Această extensiune imediată a formei din § 36 a teoremei lui Cauchy ne va fi utilă în multe împrejurări.

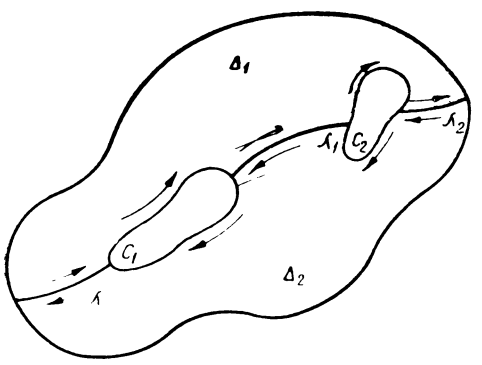


Fig. 10

38. Integrala indefinită a unei funcții monogene. Teorema lui Cauchy face posibilă introducerea noțiunii de integrală indefinită a unei funcții de variabilă complexă.

Să considerăm un domeniu simplu conex D și funcția $f(z)$ monogenă în D. Dacă z_0 este un punct fix și z un punct oarecare din D, integrala

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z)$$

definește o funcție $F(z)$ de z, care, în fiecare punct $z \in D$ are o valoare bine determinată. *$F(z)$ este o funcție monogenă în z și derivata ei este $f(z)$.*

Dacă Δz este, în modul, suficient de mic pentru ca $z + \Delta z$ să rămînă în interiorul unui cerc γ cu centrul în z și așezat în D, avem

$$\Delta F = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

ultima integrală putînd fi luată pe segmentul de dreaptă care unește pe z cu $z + \Delta z$.

Avem, așadar,

$$\Delta F = \int_z^{z+\Delta z} f(z)\, d\zeta + \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta = \Delta z f(z) + \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta$$

și deci

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z) + \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta. \tag{54}$$

Dacă însemnăm cu $\varepsilon_{\Delta z}$ marginea superioară a lui $|f(\zeta) - f(z)|$, cînd ζ variază în cercul γ de rază $|\Delta z|$, ultima integrală rămîne, în modul, inferioară lui $|\Delta z|\,\varepsilon_{\Delta z}$ și deci ultimul termen din (54) rămîne inferior lui $\varepsilon_{\Delta z}$. Dar, $f(\zeta)$ fiind continuă în $\zeta = z$, $\varepsilon_{\Delta z}$ tinde către zero cu $|\Delta z|$ și deci

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z).$$

Rezultă de aici că teorema fundamentală a calculului integral real rămîne valabilă pentru funcțiile monogene de o variabilă complexă și că ea permite calculul integralelor prin funcții primitive.

Fie, într-adevăr, $F_0(z)$ o funcție monogenă oarecare, care are ca derivată pe $f(z)$. Cum $F(z) - F_0(z)$ are derivata zero în tot domeniul D, ea este o constantă *. Dar, $F(z)$ trebuie să fie zero pentru $z = z_0$, conform teoremei din § 35; avem deci, ca și în cazul real,

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = F_0(z_1) - F_0(z_0),$$

adică, integrala este egală cu *variația funcției primitive pe drumul de integrare*.

39. Integrala lui Cauchy. Din teorema fundamentală a lui Cauchy se deduce o relație de o mare însemnătate, care leagă valorile unei funcții monogene, în interiorul unui domeniu, de valorile pe care ea le ia pe contur.

Fie C o curbă simplă închisă rectificabilă, Δ domeniul pe care-l mărginește și $f(z)$ o funcție monogenă într-un domeniu D cuprinzînd pe $\Delta + C$. z_0 fiind un punct $\in \Delta$, γ un cerc cu centrul în z_0 și cuprins în Δ, funcția

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

este monogenă în domeniul limitat de γ și C și pe aceste curbe. Conform propoziției din § 37, avem atunci

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{55}$$

* Această proprietate a funcțiilor monogene se deduce îndată din relațiile lui Cauchy și Riemann (§ 1) și din faptul că funcțiile de variabile reale care au toate derivatele lor parțiale de primul ordin nule într-un domeniu sînt constante.

Luînd pentru z un punct oarecare $z \in \Delta$ și notînd cu ζ variabila de integrare, avem

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Prima integrală din ultimul membru revine la două integrale curbilinii reale (Observația de la § 24) luate în lungul cercului γ, care se calculează ușor făcînd schimbarea de variabile.

$$\xi = x + r\cos\theta\,, \quad \eta = y + r\sin\theta,$$

unde $x + iy = z$, $\xi + i\eta = \zeta$ și r este raza cercului γ.

Avem astfel

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{r^2} \int_\gamma (\xi - x)\, d\xi + (\eta - y)\, d\eta + \frac{i}{r^2} \int_\gamma (\xi - x)\, d\eta - (\eta - y)\, d\xi.$$

Prima integrală este nulă, iar cea de-a doua este

$$i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Din (55) se deduce deci

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = 2\pi i\, f(z) + \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Se vede de aici că ultima integrală este independentă de raza r a lui γ.

Dacă însemnăm cu ε_r marginea superioară a lui $|f(\zeta) - f(z)|$ pe γ, modulul acestei integrale este inferior lui

$$2\pi r \cdot \frac{\varepsilon_r}{r} = 2\pi \cdot \varepsilon_r.$$

Dar, ε_r tinde către zero cu r, pe cînd valoarea integralei este independentă de r. Rezultă de aici că această integrală este nulă și că deci avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{56}$$

Relația aceasta este cunoscută sub numele de *integrala lui Cauchy* sau de *formula integrală a lui Cauchy*. Ea este de o mare importanță în teoria funcțiilor monogene și dă loc, după cum vom vedea, la numeroase aplicații.

40. Să observăm că expresia din membrul al doilea al lui (56) nu depinde decît de valorile lui $f(z)$ pe conturul C al domeniului Δ. Integrala lui Cauchy arată deci că valorile în Δ ale funcției monogene sînt perfect determinate prin valorile pe care ea le ia pe conturul lui Δ; fapt important, care ne arată, de pe acum, dependența între diversele părți ale funcțiilor monogene, ceea ce ne amintește olomorfia (cap. II).

Pe de altă parte, dacă luăm pentru z un punct exterior lui Δ, integrala din (56) este nulă după teorema lui Cauchy, funcția de sub semnul integral fiind atunci monogenă în $\Delta + C$. Egalitatea (56) este deci valabilă numai pentru $z \in \Delta$, deși expresia din membrul al doilea al ei are un sens și pentru z exterior lui Δ.

Să considerăm o funcție $\varphi_1(\zeta)$ continuă oarecare pe arcul rectificabil C din planul (z). Arcul C poate fi o curbă închisă, ca mai sus, sau un arc simplu oarecare, iar $\varphi(\zeta)$ poate fi definită numai pe C.

Integrala

$$\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = F(z) \tag{57}$$

definește atunci o funcție $F(z)$, univoc determinată în mulțimea D^* complement al lui C față de sfera lui Riemann (z).

Vom arăta că $F(z)$ este *funcție monogenă în* D.

Pentru aceasta, să formăm, cu notațiile obișnuite, expresia

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_C \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\Delta z}\int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_C \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)\,[(\zeta - z) - \Delta z]},$$

adică

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta + \Delta z \int_C \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2\,[(\zeta - z) - \Delta z]}. \tag{58}$$

Ultima integrală este, în modul, inferioară lui

$$\frac{ML}{\delta^2(\delta - |\Delta z|)},$$

unde $M > |\varphi(\zeta)|$ L este lungimea lui C și $|\zeta - z| > \delta > 0$, cînd $\zeta \in C$, iar $|\Delta z| < \frac{\delta}{2}$.

Valorile fixe pozitive ML și δ există evident, $\varphi(\zeta)$ fiind continuă pe C (care este compact), iar $z \in D$, neputînd fi punct de acumulare pentru C. Coeficientul lui Δz din membrul al doilea al lui (58) este deci mărginit în modul cînd $|\Delta z| \to 0$ și deci

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \tag{59}$$

Aceasta înseamnă că $F(z)$ este monogenă în D și că ea are ca derivată expresia care se obține derivînd sub semnul integral în (57) în raport cu z.

În mod analog se obțin derivatele succesive

$$\frac{d^n F}{dz^n} = n! \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

---

* D este un domeniu dacă C este un arc simplu deschis; D este format din *două* domenii dacă C este o curbă simplă închisă.

astfel încît funcțiile definite prin (57), oricare ar fi $\varphi(\zeta)$ continuă pe C, sînt infinit derivabile și deci, *împreună cu toate derivatele lor, sînt funcții monogene.*

Dacă aplicăm acest rezultat integralei lui Cauchy (56), se vede că *o funcție monogenă oarecare este infinit derivabilă* și deci că *toate aceste derivate sînt funcții monogene.*

O b s e r v a ț i a 1. Nu trebuie să confundăm valorile pe care $F(z)$ le ia pe C (arc deschis sau curbă închisă) pentru $z \to \zeta \in C$ cu valorile $\varphi(\zeta)$. Dacă acest fapt are loc în cazul integralei lui Cauchy, el nu are însă loc în general, pentru un $\varphi(\zeta)$ dat.

De exemplu, dacă C este cercul unitate $|z| = 1$ și $\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, avem în $|z|<1$

$$F(z) = \int_C \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} \equiv 0,$$

cum se calculează ușor, și deci $F(z) = 0$ pe $|z| = 1$, cu toate că $|\varphi(\zeta)| = 1$ pe această circumferință.

Pentru ca să avem $F(\zeta) = \varphi(\zeta)$ pe C trebuie ca $\varphi(\zeta)$ să satisfacă unele condiții speciale, care tocmai sînt satisfăcute de valorile luate pe frontiera C de funcțiile monogene în $\Delta + C$*.

O b s e r v a ț i a 2. Dacă admitem de la început că funcțiile reale $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ care intră în compunerea funcției monogene $f(z)$ au, de exemplu, derivate parțiale continue de primele două ordine, monogenitatea derivatei de primul ordin rezultă îndată din relațiile Cauchy-Riemann. Demonstrația de mai sus este independentă de asemenea ipoteză; ea rezultă din teorema fundamentală a lui Cauchy, dedusă numai din *existența* derivatei lui $f(z)$.

41. Ca aplicație a rezultatelor obținute în paragrafele precedente se poate demonstra cu ușurință inversa teoremei fundamentale, cunoscută sub numele de teorema lui Morera:**

Dacă o funcție de variabilă complexă, continuă într-un domeniu D, este astfel încît integrala

$$\int_C f(z)\, dz,$$

luată pe un arc de curbă rectificabil oarecare C din D, nu depinde decît de extremitățile lui C, funcția $f(z)$ este monogenă în D.

Într-adevăr, avem atunci o funcție $F(z)$ definită în D prin

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta,$$

După teorema din § 38, această funcție este monogenă în D și are ca derivată pe $f(z)$, deoarece în demonstrația acestei teoreme nu intervine decît

* Se poate vedea în acest sens H u r w i t z - C o u r a n t, *Funktionentheorie*, Berlin, 1929, sau, pentru o tratare mai amplă într-un cadru adecvat, I. I. P r i v a l o v, *Graniciniie svoistva analiticeskih funcții*, Moskva-Leningrad, 1950.

** Teorema a fost regăsită de D. P o m p e i u în 1905, în mod cu totul independent, în teza sa de doctorat. Paris 1905.

faptul că $\int_C f(z)\,dz$ depinde numai de extremitățile lui C. Dar $F(z)$ fiind monogenă, derivata ei $f(z)$ este monogenă, după § 40.

42. Schimbare de variabilă în integrala unei funcții monogene. Ca o altă aplicație a celor stabilite mai sus, să dăm formula de schimbare de variabilă în integrala funcțiilor monogene, absolut analogă formulei cunoscute din calculul integral real.

Funcția $f(z)$ fiind monogenă în domeniul D din (z), fie $z = \varphi(\zeta)$ o funcție monogenă în domeniul Δ din (ζ) și Γ o curbă din (Δ) astfel încît, atunci cînd ζ descrie Γ, $z = \varphi(\zeta)$ descrie $C \subset D$.

Vom arăta că avem

$$I = \int_C f(z)\,dz = \int_\Gamma f[\varphi(\zeta)]\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta,$$

unde $\varphi'(\zeta)$ este derivata lui φ în raport cu ζ.

Dacă însemnă prin ζ_k punctele corespunzătoare unei diviziuni a lui Γ în sensul din § 22 și punem $z_k = \varphi(\zeta_k)$, sumele S, care ne-au servit la definiția integralei I, se pot scrie

$$S = \sum_k f(z_k)\,(z_{k+1} - z_k) = \sum_k f[\varphi(\zeta_k)]\,[\varphi(\zeta_{k+1}) - \varphi(\zeta_k)]. \tag{60}$$

Dar, după cele ce am văzut în § 38, avem

$$\varphi(\zeta_{k+1}) - \varphi(\zeta_k) = \int_{(\zeta_k,\ \zeta_{k+1})} \varphi'(\zeta)\,d\zeta = \int_{(\zeta_k,\ \zeta_{k+1})} \varphi'(\zeta_k)\,d\zeta +$$

$$+ \int_{(\zeta_k,\ \zeta_{k+1})} [\varphi'(\zeta) - \varphi'(\zeta_k)]\,d\zeta,$$

$(\zeta_k,\ \zeta_{k+1})$ fiind arcele lui Γ cuprinse între aceste două puncte.

Această din urmă integrală este, în modul, inferioară lui

$$\varepsilon_k \cdot \text{lung. arc } (\zeta_k,\ \zeta_{k+1}),$$

unde ε_k este marginea superioară a lui $|\varphi'(\zeta) - \varphi'(\zeta_k)|$ cînd ζ parcurge arcul $(\zeta_k,\ \zeta_{k+1})$.

Substituind în (60) și ținînd seama că

$$\int_{(\zeta_k,\ \zeta_{k+1})} \varphi'(\zeta_k)\,d\zeta = (\zeta_{k+1} - \zeta_k)\,\varphi'(\zeta_k),$$

se obține

$$\sum_k f(z_k)\,(z_{k+1} - z_k) = \sum_k f[\varphi(\zeta_k)]\,\varphi'(\zeta_k)\,(\zeta_{k+1} - \zeta_k) +$$

$$+ \sum_k f[\varphi(\zeta_k)] \int_{(\zeta_k,\ \zeta_{k+1})} [\varphi'(\zeta) - \varphi'(\zeta_k)]\,d\zeta.$$

Dacă $|f(z)| < M$ pe C, ultima sumă este, în modul, inferioară lui

$$M \sum_k \varepsilon_k \cdot \text{ lung. arc. } (\zeta_k, \zeta_{k+1}). \tag{61}$$

Or, din cauza continuității uniforme a lui $\varphi'(\zeta)$, cînd arcele (ζ_k, ζ_{k+1}) tind către zero, ε_k rămîn inferiori unui $\varepsilon > 0$ dat dinainte arbitrar.

Deci, cînd S tinde către integrala I, expresia (61) rămîne inferioară lui

$$M \varepsilon \sum_k \text{lung . arc } (\zeta_k, \zeta_{k+1}) = M \varepsilon \Lambda,$$

Λ desemnînd lungimea arcului de curbă Γ, iar ε fiind oricît de mic.

Avem deci, cînd S tinde către I,

$$I = \lim S = \lim \sum_k f[\varphi(\zeta_k)]\, \varphi'(\zeta_k)\, (\zeta_{k+1} - \zeta_k),$$

care, după definiția integralei, reprezintă tocmai

$$\int_\Gamma f[\varphi(\zeta)]\, \varphi'(\zeta)\, d\zeta.$$

43. Dezvoltarea în serie taylorianã a funcțiilor monogene. Echivalența între monogenitate în D și olomorfie în D. În sfîrșit, integrala lui Cauchy ne permite să arătăm faptul, de o importanță capitală, că funcțiile monogene în D sînt dezvoltabile în serie taylorianã în jurul oricărui punct din D, adică sînt olomorfe în D (cap. II, § 10), de unde rezultă echivalența acestor două noțiuni.

Fie z_0 un punct din D, domeniul de monogenitate a lui $f(z)$, și C un cerc cu centrul în z_0 și așezat în întregime în D.

Avem, după formula integrală a lui Cauchy,

$$2\pi i f(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{62}$$

Pentru a pune în evidență pe z_0, să scriem integrala în modul următor:

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\, d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\, d\zeta.$$

Să observăm că, r fiind raza cercului C, cum z este interior lui C, iar ζ este pe circumferința sa, avem

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1.$$

Egalitatea (62) se poate deci scrie

$$2\pi i f(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right] d\zeta.$$

Or, seria de sub semnul integral este uniform convergentă pe C, deoarece termenii ei sînt, în modul, inferiori termenilor seriei convergente cu termeni constanți (în raport cu variabila de integrare ζ)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{r^n}.$$

Integrarea pe C se poate deci face termen cu termen* și avem:

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots, \quad (63)$$

unde am pus

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (64)$$

Dezvoltarea (63), împreună cu observația făcută că funcțiile olomorfe sînt monogene, stabilește, după cum am spus mai înainte, echivalența între monogenitate într-un domeniu și olomorfie în acel domeniu. Cele două proprietăți dau deci două definiții diferite ale aceleiași noțiuni.

Raționamentul nostru mai arată însă că dezvoltarea (63) este valabilă *în orice cerc cu centrul în z_0 cuprins în D*. Pentru funcții monogene în domenii cunoscute, avem deci un minim pentru raza de convergență a seriei care reprezintă funcția în jurul lui z_0.

Formulele (64) ne dau expresia coeficienților c_n ai dezvoltării. Cum știm că aceștia sînt legați de derivatele succesive ale lui $f(z)$ în $z = z_0$ (cap. II, § 8), prin formulele clasice, avem, însemnînd prin $f^{(n)}(z_0)$ derivata de ordin n în z_0 a lui $f(z)$, relațiile

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (64')$$

44. Aplicații la demonstrarea unor proprietăți ale olomorfiei. Vom folosi echivalența stabilită între monogenitate și olomorfie pentru a demonstra că anumite operații duc de la funcții olomorfe tot la funcții olomorfe.

Să considerăm o funcție $u = f(z)$ olomorfă în D și univalentă în acest domeniu. Atunci, imaginea Δ a lui D, din planul (u), este tot un domeniu (cap. II, § 24) și există o funcțe inversă $z = f^{-1}(u)$, univoc determinată în Δ, care transformă pe Δ în D. Din teorema variației argumentului (cap. II, § 22) rezultă că $\frac{du}{dz}$ *nu poate să fie nulă în nici un punct din D.*

Într-adevăr, în jurul unui asemenea punct z_0 am avea

$$u = f(z) = u_0 + c_p (z - z_0)^p + c_{p+1} (z - z_0)^{p+1} + \ldots,$$

cu $p \geqslant 2$.

---

* Acest fapt, bine cunoscut pentru seriile de funcții reale uniform convergente, se demonstrează exact în același mod pentru seriile de funcții complexe continue, pentru care am definit integrala.

Cum funcția $f(z) - u_0$ ar avea atunci un zero cel puțin dublu în $z = z_0$, după teorema amintită (cap. II, § 24) și valorile suficient de vecine de u_0 ar fi luate tot de cel puțin două ori în vecinătatea lui z_0. Or, aceasta contrazice ipoteza univalenței lui $f(z)$ în D.

Să arătăm acum că $z = f^{-1}(u)$ *este, și ea, funcție olomorfă în* Δ. După echivalența între olomorfie și monogenitate în Δ, este suficient să arătăm că ea are o derivată în fiecare punct din Δ. Or, dacă însemnăm prin Δu și Δz variațiile corespunzătoare ale lui u și z, avem evident

$$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{1}{\frac{\Delta u}{\Delta z}}. \tag{65}$$

Dar $u = f(z)$ fiind olomorfă în D, unui cerc $\gamma \subset D$ cu centrul în z îi corespunde, în Δ, un domeniu δ. El conține un cerc γ', cu centrul în $u = f(z)$. Cînd, Δz variind, punctul $z + \Delta z$ descrie γ, punctul $u + \Delta u$ descrie deci un domeniu care cuprinde pe γ', adică Δu poate lua *orice* valoare de modul suficient de mic. Din (65) se poate atunci deduce că avem

$$\lim_{|\Delta u| \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{1}{\lim\limits_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta z}} = \frac{1}{\frac{du}{dz}}$$

și, cum $\frac{du}{dz} \neq 0$, se vede că $\frac{dz}{du}$ există și este diferit de zero.

Deci, *inversa unei funcții olomorfe univalente în D este o funcție olomorfă univalentă în* Δ.

Se recunoaște astfel, în particular, că diversele determinări ale funcțiilor $z = \ln u$, $z = \arc \sin u$, $z = \arc \cos u$, care sînt definite ca inverse funcțiilor $u = e^z$, $u = \sin z$, $u = \cos z$ definite în capitolul II, § 9, sînt olomorfe în domeniile respective.

45. Fie $z = \varphi(\zeta)$ o funcție olomorfă în Δ și D imaginea lui Δ prin această transformare.

Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în D.

Funcția

$$F(\zeta) = f[\varphi(\zeta)]$$

este și ea olomorfă în Δ.

Avem, într-adevăr,

$$\frac{\Delta F}{\Delta \zeta} = \frac{\Delta f}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta \zeta},$$

$\Delta\varphi$, Δf și ΔF reprezentînd variațiile care corespund lui $\Delta\zeta$.

Din existența derivatei lui φ și a lui f rezultă existența derivatei lui F în raport cu ζ și deci olomorfia sa în Δ. Se vede, în plus, că (exact ca în cazul real) avem

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\zeta} .$$

46. Inegalitățile lui Cauchy. Aplicații. Din relațiile (64) se deduce o importantă limitare a modulului coeficienților dezvoltării (63) și, prin urmare, după (64') și a derivatelor lui $f(z)$ în punctul $z = z_0$.

Într-adevăr, aplicînd limitarea din § 26, avem

$$|c_n| \leqslant 2\pi r \cdot \frac{M(r)}{2\pi r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n} , \tag{66}$$

unde $M(r) = \max |f(z)|$ pe $|z - z_0| = r$.

Inegalitățile (66) sînt *inegalitățile lui Cauchy*. Ele au numeroase aplicații. Vom da aici una dintre cele mai imediate.

Se numește funcție *întreagă* o funcție $G(z)$, reprezentată printr-o serie

$$G(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots , \tag{67}$$

a cărei rază de convergență este ∞.

Seria reprezintă deci funcția $G(z)$ în tot planul (z).

După teorema lui Cauchy și Hadamard (cap. II, § 2), avem, pentru coeficienții c_n ai unei astfel de funcții, $\lim \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Inegalitățile (66) ne permit să punem în evidență alte importante proprietăți ale funcțiilor întregi.

T e o r e m a l u i L i o u v i l l e. *Orice funcție întreagă mărginită în tot planul* (z) *este o constantă.*

Într-adevăr, dacă pentru orice z avem $|G(z)| < M$, putem scrie

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{r^n} .$$

Cum seria din (67) este convergentă pentru orice z, această inegalitate are loc pentru orice r și deci $c_n = 0$, dacă $n \geqslant 1$. Rezultă că $G(z) = c_0$, adică o constantă.

Teorema se extinde în modul următor: *dacă pentru o funcție* $G(z)$ *întreagă avem* $M(r_k) \leqslant r_k^p$, *pentru un șir de valori* r_k *tinzînd către* ∞ *cu* k, p *fiind un număr real pozitiv fix,* $G(z)$ *este un polinom de gradul* p *cel mult.*

Aici inegalitățile lui Cauchy ne dau, pentru șirul r_k,

$$|c_n| \leqslant \frac{r_k^p}{r_k^n} = \frac{1}{r_k^{n-p}} ,$$

ceea ce arată că, dacă $n > p$, avem $c_n = 0$.

Funcția pozitivă și crescătoare $M(r)$, atașată funcției $G(z)$, este foarte importantă pentru studiul funcțiilor întregi.

Vom vedea mai tîrziu rolul fundamental pe care îl joacă, în studiul acestora, iuțeala cu care $M(r)$ tinde către ∞ cu r.

Dar, inegalitatea obținută la sfîrșitul capitolului II, § 30, ne permite să adîncim încă rezultatul precedent.

Să presupunem $G(0) = 0$.

Fie $A(R) = \max P(x, y)$, pe $|z| = R$, unde $P(x, y)$ este partea reală a lui $G(z)$ și $r < R$.

Avem, după inegalitatea amintită,

$$M(r) \leqslant \frac{2rA(R)}{R - r}.$$

Dacă facem aici $R = 2r$, obținem, pentru orice $r > 0$,

$$M(r) \leqslant 2A(2r).$$

Să presupunem acum că, în locul inegalității $M(r_k) \leqslant r_k^p$, avem inegalitatea, mai slabă, $A(r_k) \leqslant r_k^p$.

Rezultă atunci

$$M\left(\frac{r_k}{2}\right) \leqslant 2r_k^p,$$

ceea ce duce, aplicînd inegalitățile (66), la aceleași concluzii ca mai sus.

Dacă $G(0) \neq 0$, putem scrie $G(z) = c_0 + G_1(z)$ cu $G_1(0) = 0$; se constată că raportul dintre $\max_{|z|=r} \Re\, G(z)$ și $\max_{|z|=r} \Re\, G_1(z)$ tinde către 1 cînd $r \to \infty$ [dacă $G(z)$ nu este o constantă].

Deci, dacă partea reală a unei funcții întregi este, pe cercul $|z| = r_k$, inferioară sau cel mult egală cu r_k^p, pentru un șir de valori r_k tinzînd către ∞ cu k, atunci $G(z)$ este un polinom de gradul p cel mult.

Teorema aceasta, datorită lui J. Hadamard, este importantă în teoria funcțiilor întregi.

Bineînțeles, $P(x, y)$ se poate înlocui cu $Q(x, y)$, coeficientul lui i în funcția $G(z)$; de asemenea se pot înlocui maximele cu valorile absolute ale minimelor, cum am observat în capitolul II.

47. Dezvoltarea în serie a unei funcții monogene într-o coroană circulară. După cum cercul este cel mai simplu domeniu cu conexiune simplă, coroana circulară, adică domeniul definit prin

$$r_1 < |z - z_0| < r \quad (\text{cu } r > r_1 \text{ oarecare}),$$

este cel mai simplu domeniu multiplu conex.

Procedeul din § 43 se poate extinde cu ușurință pentru a obține, printr-un tip de serii foarte asemănător seriilor tayloriene, o dezvoltare în serie a unei funcții monogene, valabilă într-o coroană circulară.

Să observăm pentru aceasta că formula integrală a lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

stabilită mai sus pentru un domeniu limitat de o singură curbă C, se extinde numaidecît la domenii limitate de $n + 1$ curbe $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$, întocmai ca teorema fundamentală a lui Cauchy, a cărei consecință este.

Deci, pentru orice z, cuprins în coroana circulară

$$r_1 < |z - z_0| < r$$

limitată de cercurile $|z - z_0| = r_1$ și $|z - z_0| = r$ și pentru orice funcție $f(z)$ monogenă în această coroană și pe frontiera ei, avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{68}$$

în care ambele integrale sînt luate în sensul direct.

Întocmai ca și în § 43, prima integrală din (68) se poate înlocui cu seria

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{69}$$

În ceea ce privește integrala luată în lungul lui C_1, să o scriem sub forma

$$-\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{z - z_0}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}\right)d\zeta,$$

pentru că avem pe C_1, adică pentru $|\zeta - z_0| = r_1$, inegalitatea

$$\frac{r_1}{|z - z_0|} < 1.$$

Raționamentul din § 43 aplicat aici duce atunci la expresia

$$-\int_{C_1} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_{-2}(z - z_0)^{-2} + \ldots + c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \ldots,$$

unde

$$c_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1-m}}\,d\zeta. \tag{70}$$

Să observăm că formulele (69) și (70) pot fi puse sub formă comună, dînd în (69) lui n și valori întregi negative. Pe de altă parte, integralele din (69) și (70) pot fi luate pe un cerc C de centru z_0 și de rază oarecare cuprinsă între r_1 și r. Se obține deci pentru orice funcție $f(z)$, monogenă în domeniul $r_1 < |z - z_0| < r$, expresia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{71}$$

cu

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \tag{72}$$

fiind înțeles că notația din membrul al doilea al lui (71) înseamnă suma celor două serii

$$\begin{cases} c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \\ \quad + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_{-2}(z - z_0)^{-2} + \dots \end{cases} \tag{73}$$

O asemenea serie se numește o serie Laurent, după numele celui care a indicat această dezvoltare.

O serie Laurent se compune deci din două serii cu coeficienți c_n ($n \geqslant 0$ și $n < 0$) arbitrari. Prima este o serie taylorianã, iar cea de-a doua devine o serie taylorianã în z', prin substituția $z - z_0 = \frac{1}{z'}$.

Dacă o serie Laurent are un domeniu de convergență, acesta nu poate fi decît o coroană circulară.

Într-adevăr, domeniul de convergență al primei serii din (73) este, după cum știm, de forma

$$|z - z_0| < R,$$

iar cel al seriei a doua din (73), după cele observate mai sus, este de forma

$$|z'| = \frac{1}{|z - z_0|} < \rho,$$

adică

$$|z - z_0| > \frac{1}{\rho} = R'.$$

Prin urmare, seria Laurent este absolut convergentă în domeniul

$$R' < |z - z_0| < R,$$

dacă $R' < R$, iar dacă $R' > R$ ea nu are nici un domeniu de convergență *.

În primul caz, se vede îndată că ea este și uniform convergentă în orice coroană circulară închisă

$$r' \leqslant |z - z_0| \leqslant r,$$

unde $r' > R'$ și $r < R$.

Această din urmă observație ne permite să arătăm că *dezvoltarea* (71) *este unică*, adică nu există două serii Laurent convergente diferite într-o aceeași coroană circulară și care să reprezinte aceeași funcție.

Dacă ar fi altfel, ar exista o serie Laurent a cărei sumă ar fi identic zero într-o coroană circulară, fără ca ea să aibă toți coeficienții săi nuli.

Or, dacă înmulțim toți termenii seriei (71) cu $(z - z_0)^{-k-1}$, unde k este un număr întreg oarecare dat, și integrăm apoi termen cu termen, cum

* Seria ar putea să aibă puncte de convergență care nu formează nici un domeniu, ci s înt așezate pe $|z - z_0| = R$, dacă $R' = R$.

ne permite convergența uniformă, pe o circumferință C cu centrul z_0 și interioară coroanei circulare, integrala tuturor termenilor va fi nulă, afară de cea a termenului de indice k.

Avem deci

$$0 = \int_C c_k(z - z_0)^{-1}\, dz = 2\pi i\, c_k,$$

adică $c_k = 0$. Or, k este un întreg oarecare, deci seria Laurent considerată are toți coeficienții ei zero.

În reprezentarea (71) printr-o serie Laurent a funcției $f(z)$, partea în care exponenții lui $z - z_0$ sînt negativi [a doua serie din (73)] se numește *partea principală a dezvoltării*.

Dacă funcția $f(z)$ este monogenă în tot cercul $|z - z_0| < r$, această parte principală dispare, toți coeficienții ei sînt nuli.

Într-adevăr, funcția $f(z)$ fiind atunci dezvoltabilă în serie tayloriană în tot cercul $|z - z_0| < r$, această serie o reprezintă și în coroana circulară $r_1 < |z - z_0| < r$.

De altfel, se vede îndată după expresia (72) a coeficienților c_n că, în acest caz, toți c_n cu indici negativi sînt nuli; aceasta este o consecință a teoremei fundamentale.

48. Reziduu. În interiorul unei coroane circulare D, în care $f(z)$ este monogenă, să considerăm o curbă simplă închisă rectificabilă oarecare Γ. Integrala

$$\int_\Gamma f(z)\, dz$$

este nulă, după teorema lui Cauchy, dacă domeniul limitat de Γ este cuprins în D. Dacă însă Γ nu satisface această condiție (cum ar fi cazul, de exemplu, al unei circumferințe cuprinse în D și concentrică cu cele două cercuri frontieră ale lui D), atunci această integrală este, în general, diferită de zero.

După formulele (72), avem atunci

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, c_{-1}. \tag{74}$$

Coeficientul c_{-1} are deci o deosebită însemnătate în dezvoltarea (71); el se numește *reziduu* al funcției $f(z)$ în coroana circulară D.

C a u c h y, care a introdus această noțiune, a dat numeroase aplicații ale ei *. Vom arăta aici cum, cu ajutorul reziduului, se pot calcula direct și anumite integrale definite, reale, fără a trece prin funcția primitivă.

49. Să considerăm integrala reală

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx.$$

* Se poate vedea pentru aceasta E. P i c a r d, *Traité d'Analyse*, Paris, t. II.

Funcția

$$\frac{\cos z}{1+z^2} = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2(1+z^2)}$$

este monogenă în orice punct din planul (z), afară de $z = \pm i$.

Fie Γ conturul format din segmentul $(-R, +R)$ de pe axa reală și de semicircumferința L, cu centrul în $z = 0$ și cu raza R, situată în semiplanul superior. Fie γ o circumferință cu centrul în $z = i$ și interioară conturului Γ. Este suficient să calculăm integrala

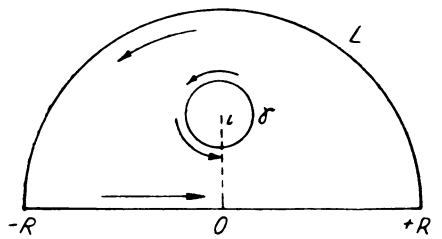


Fig. 11

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xi}}{1+x^2}\,dx,$$

cealaltă avînd aceeași valoare, după cum se constată îndată, schimbînd pe x în $-x$.

Vom considera deci integrala complexă

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{zi}}{1+z^2}\,dz = \int_{\gamma} \frac{e^{zi}}{1+z^2}\,dz, \qquad (75)$$

luată în sens direct cum se indică în figura 11.

Funcția fiind monogenă în orice coroană circulară cu centrul în $z = i$ și cuprinsă în interiorul semicercului Γ, ultima integrală are ca valoare reziduul funcției pentru γ. Or, avem

$$\frac{e^{zi}}{1+z^2} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{e^{zi}}{z+i} = \frac{1}{z-i}\left[\alpha_0 + \alpha_1(z-i) + \alpha_2(z-i)^2 + \ldots\right],$$

seria din paranteză reprezentînd dezvoltarea tayloriană a lui $\frac{e^{zi}}{z+i}$ în jurul lui $z = i$. Deci, într-o coroană circulară cu centrul în $z = i$, avem

$$\frac{e^{zi}}{1+z^2} = \frac{\alpha_0}{z-i} + \alpha_1 + \alpha_2(z-i) + \ldots, \qquad (76)$$

ceea ce arată că α_0 este reziduul căutat. Or, avem

$$\alpha_0 = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)\,e^{zi}}{1+z^2},$$

adică

$$\alpha_0 = \frac{e^{-1}}{2i}$$

și deci, după (74),

$$\int_{\gamma} \frac{e^{zi}}{1+z^2}\,dz = \pi e^{-1}.$$

Să revenim acum la egalitatea (75). Ea dă acum

$$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{xi}}{1+x^2}\,dx + \int_L \frac{e^{zi}}{1+z^2}\,dz = \pi e^{-1}. \tag{77}$$

Or, dacă scriem

$$\frac{z\,e^{zi}}{1+z^2} = \lambda(z),$$

se vede că

$$\lim\ |\lambda(z)| = 0,$$

pentru $|z| \to \infty$ în semiplanul (z) superior, deoarece în acest semiplan

$$|e^{zi}| = e^{-y} < 1.$$

Avem deci

$$\int_L \frac{e^{zi}}{1+z^2}\,dz = \int_L \frac{\lambda(z)}{z}\,dz$$

și deci

$$\left|\int_L \frac{e^{zi}}{1+z^2}\,dz\right| < \pi R\,\frac{\lambda(R)}{R} = \pi\,\lambda(R),$$

unde $\lambda(R) = \max\ |\lambda(z)|$ pe L.

Cum $\lim\limits_{R\to\infty} \lambda(R) = 0$, se vede că

$$\lim_{R\to\infty} \int_L \frac{e^{zi}}{1+z^2}\,dz = 0$$

și, prin urmare, după (77), că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xi}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-1}.$$

După observațiile făcute mai sus, avem deci și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-1}.$$

Se constată cu ușurință că

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx.$$

Rezultatul obținut ne dă deci și integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-1}.$$

Se calculează în același mod integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2}\,dx,$$

unde m este un număr întreg oarecare.

50. Procedeul întrebuințat aici pentru calculul reziduului poate fi folosit ori de cîte ori, în dezvoltarea Laurent, partea principală se reduce la primul ei termen, adică atunci cînd reziduul este singurul coeficient cu indice negativ diferit de zero.

Se vede că aceasta se întîmplă ori de cîte ori funcția este meromorfă în $|z - z_0| < r$ și are în $z = z_0$ un pol simplu.

Dezvoltarea pe care am dat-o în capitolul II, în jurul unui pol, este într-adevăr un caz particular al seriei Laurent: cazul în care partea principală are numai un număr finit de termeni.

Să observăm de asemenea că procedeul întrebuințat a reușit și grație faptului că, în (77), a doua integrală tinde către zero, cînd raza R tinde către ∞. Este, așadar, important să alegem conturul de integrare în mod convenabil, astfel încît, pe anumite porțiuni ale acestui contur, altele decît drumul de integrare dat, integrala (dacă nu se poate exprima simplu cu ajutorul integralei de calculat) să fie nulă.

Observația următoare poate servi și ea în numeroase aplicații.

Să presupunem că $f(z)$, olomorfă într-un domeniu care se întinde la infinit, este astfel încît, pe un arc de cerc Γ de centru O și de rază R din acest domeniu, avem

$$\lim_{R\to\infty} |z| \cdot |f(z)| = 0. \tag{78}$$

Atunci integrala

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

tinde către zero, cînd $R \to \infty$.

Într-adevăr, să punem

$$\lambda(z) = z f(z).$$

Avem atunci

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\Gamma \frac{\lambda(z)}{z}\,dz\right| \leqslant 2\pi R \cdot \frac{M(R)}{R} = 2\pi M(R),$$

unde $M(R)$ este maximul lui $|\lambda(z)|$ pe Γ. Or, după (78), avem

$$\lim_{R\to\infty} M(R) = 0.$$

Deci

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

De acest fapt ne-am folosit în exemplul de mai sus.

51. Bazat pe aceste observări, cititorul va calcula integrale de tipul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin mx\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos mx\, dx,$$

în care $R(x)$ este funcție rațională de x, fără poli pe axa reală iar m este o constantă reală.

Se va alege, în fiecare caz, conturul de integrare potrivit.

Prin schimbarea de variabile $z = e^{x'i}$ se vor calcula, în baza acelorași principii, și integralele

$$\int_0^{2\pi} R(\sin z, \cos z)\, dz,$$

unde R este funcție rațională de $\sin z$ și $\cos z$.

52. Deși noțiunea de reziduu nu face să intervină direct decît valorile funcției într-un domeniu de monogenitate (aici o coroană circulară sau un domeniu asemănător), se vede din cele de mai sus că reprezentarea funcției în acest domeniu (reprezentare de care depinde, după cum am observat, și modul de a calcula reziduul) este determinată de comportarea funcției *în afara* domeniului. Considerații de acest fel au condus la necesitatea de a extinde funcția dincolo de domeniul în care ea ne este dată.

În capitolul următor vom începe studiul sistematic al funcțiilor analitice din acest punct de vedere.

CAPITOLUL IV

FUNCȚIILE ANALITICE CONSIDERATE ÎN ÎNTREGUL LOR DOMENIU DE EXISTENȚĂ

I. PRELUNGIREA ANALITICĂ

1. Am studiat în capitolele precedente funcțiile olomorfe sau meromorfe, *într-un domeniu dat*, fără a ne preocupa de existența și de natura unei asemenea funcții în afara acestui domeniu.

Studiul acesta local al funcțiilor analitice era necesar pentru a putea aborda studiul lor *global*, adică pentru cercetarea funcțiilor analitice privite în întregimea lor, considerate în întregul lor domeniu de existență.

Spre deosebire de ceea ce se petrece în teoria funcțiilor de variabilă reală, cînd — în general — o funcție dată într-un domeniu (sau interval) poate fi prelungită dincolo de el într-un mod mai mult sau mai puțin arbitrar, în cazul funcțiilor analitice o astfel de prelungire nu este posibilă decît într-un singur fel, după cum rezultă din proprietatea pe care am desemnat-o sub numele de „identitatea funcțiilor olomorfe" (cap. II, § 12).

K. W e i e r s t r a s s a indicat un procedeu regulat de prelungire a funcțiilor olomorfe, care duce la domeniul natural de existență al întregii funcții analitice, concepută global.

Ideea elementară de care se leagă conceptul de funcție olomorfă este, după cum am văzut, seria de puteri. Ea va constitui deci elementul de definiție al funcției analitice, iar toate proprietățile globale ale acesteia vor fi determinate de acest element.

Să considerăm *elementul* definit prin seria tayloriană

$$(E_0) \quad c_0 + c_1 (z - z_0) + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots,$$

cu raza de convergență $R > 0$ și cu centrul z_0.

Am văzut că fiecărui punct z_1 din domeniul circular

$$| z - z_0 | < R,$$

îi corespunde o serie analogă cu (E_0), fie

$$(E_1) \qquad c'_0 + c'_1 (z - z_1) + \ldots + c'_n (z - z_1)^n + \ldots,$$

a cărei rază de convergență R' este *cel puțin* egală cu $R - |z_1 - z_0|$ (cap. II, § 8) și care, în domeniul comun lui $|z - z_0| < R$ și $|z - z_1| < R'$, are aceeași sumă ca seria (E_0).

Dacă $R' > R - |z_1 - z_0|$, seria (E_1) este convergentă și în domeniul haşurat din figura 12, care depășește cercul de convergență al lui (E_0) și în care deci E_0 nu mai are sens. Se spune atunci — după K. Weierstrass — că (E_1) reprezintă *prelungirea analitică a lui* (E_0), determinînd funcția definită prin (E_0) în afara cercului de convergență a lui (E_0).

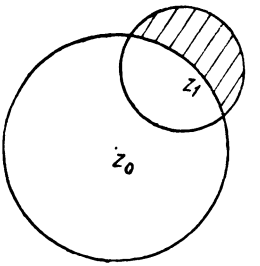


Fig. 12

Operația aceasta se poate repeta, seria (E_1) luînd locul seriei (E_0) și dînd naștere unei noi prelungiri, printr-un alt element (E_2) cu centrul z_2 în interiorul lui $|z - z_1| < R'$ și depășind pe acesta într-o parte. Continuînd astfel, obținem o mulțime de elemente noi (E_3), (E_4),... derivînd — direct sau prin intermediul altora — din (E_0) prin procesul indicat. Toate elementele care se pot obține astfel din elementul inițial (E_0) dat formează *domeniul de existență al funcției analitice* (în sensul lui Weierstrass) generată de (E_0) * funcția analitică generată de (E_0) fiind definită în fiecare punct al acestui domeniu prin valoarea în centru a seriei care reprezintă punctul (elementul) respectiv.

Funcția are o valoare bine determinată și finită în fiecare element al domeniului ei de existență.

Printre elementele acestea, unele se pot obține fără ca centrele intermediare să părăsească interiorul unui element dat (E_k). Se spune că ele constituie prelungirea *directă* a lui (E_k). Toate aceste elemente au serii tayloriene care, în interiorul cercului de convergență a lui (E_k), au aceeași sumă, adică aceeași valoare pentru funcție, ca și seria lui (E_k).

Se constată îndată (cap. III, § 43) că mulțimea elementelor care generează una și aceeași funcție analitică este *independentă de elementul inițial ales printre ele*, deoarece procesul care duce de la (E_k) la $(E_{k'})$ este reversibil.

2. Prelungire în lungul unui drum continuu. Fie L un drum continuu (cap. I, § 21) avînd o extremitate în z_0. Punctul z este pe el funcție continuă de t pentru $t \geqslant 0$, $t = 0$ corespunzînd cu $z = z_0$.

Fie z_t valoarea lui z pentru un t dat și a marginea superioară a valorilor α, astfel ca pentru $0 \leqslant t < \alpha$, z_1 să fie cuprins în interiorul cercului lui (E_0). Toate elementele (E_t) corespunzătoare se obțin prin prelungire directă din (E_0) și ele sînt singurele elemente de acest fel cu centrul pe L.

Fiecare punct $t = a' < a$ poate juca rolul asemănător cu al lui $t = 0$, pentru prelungirea directă pe L a elementului $(E_{a'})$ corespunzător, și se pot obține astfel, pe semiaxa $t \geqslant 0$, un șir de intervale semideschise $(0 \leqslant t < a)$, $(a' \leqslant t < b)$, $(b' \leqslant t < c)$,... cu $a' < a$, $b' < b$,..., intervale a căror reuniune formează un interval semideschis L_l

$$0 \leqslant t < l,$$

cu $l > a, a', b, b', \ldots$

* Vom lărgi într-o oarecare măsură acest domeniu atunci cînd mai tîrziu vom introduce noțiunea de domeniu riemannian de existență al functiei.

Elementele (E_t) corespunzătoare se numesc elemente obținute prin prelungirea lui (E_0) *în lungul drumului* L *.

Cînd t descrie intervalul I_l, centrul elementului (E_t) descrie o porțiune din L, avînd punctul inițial în z_0. Și acest proces de prelungire este reversibil, ca și cel de mai sus.

Oricare element obținut în acest mod se poate obține și printr-un lanț *finit* de elemente cu centrele pe L, fiecare fiind element de prelungire directă a precedentului. Ele fac parte din funcția analitică generată de elementul inițial (E_0).

3. Punctele singulare ale unei funcții analitice. Toate punctele care pot fi atinse astfel prin prelungirea lui (E_0), în lungul unui drum continuu oarecare L (adică punctele care sînt centrul unui element obținut printr-o astfel de prelungire) se numesc puncte *ordinare* ale funcției analitice.

În orice punct ordinar, funcția are o valoare bine determinată (finită).

Într-adevăr, în vecinătatea unui asemenea punct, ea este reprezentabilă printr-o serie tayloriană: seria elementului (E_t) corespunzător. Funcția este olomorfă în vecinătatea unui asemenea punct.

Se poate însă întîmpla ca prelungirea în lungul lui L a elementului (E_0) să nu se poată continua oricît de departe pe L, adică se poate ca razele cercurilor elementelor (E_t), cînd t tinde către l, să tindă către zero, astfel încît punctul z_l, de care prelungirea pe L ne apropie indefinit, să nu poată fi atins în sensul de mai sus. Se spune atunci că acest punct este *singular* pentru funcția analitică.

Punctul de la ∞ este ordinar sau singular, după cum este ordinar sau singular punctul $z' = 0$, pentru funcția obținută înlocuind z cu $\frac{1}{z'}$ într-unul din elementele funcției care nu cuprinde pe $z = 0$ și efectuînd apoi prelungirea pe drumul L', transformat al lui L.

O b s e r v a ț i e. Este foarte important să observăm că noțiunea de punct ordinar sau singular este esențialmente legată de drumul L parcurs.

Un punct $z = a$ din plan poate fi ordinar, pentru un drum dat pornind din (E_0), și singular pentru alt drum, pornind de la același element (E_0). Mai mult chiar, dacă $z = a$ ar fi ordinar pentru ambele aceste drumuri, se poate întîmpla (și este în general cazul) ca elementul obținut în $z = a$ pe primul drum să nu coincidă cu elementul obținut în același punct pe celălalt drum. Această din urmă împrejurare ne impune deja împărțirea funcțiilor analitice în două mari clase, funcții uniforme și funcții multiforme, după cum vom arăta îndată.

4. Vom stabili însă mai întîi două teoreme care decurg cu ușurință din definițiile de mai sus și din proprietățile olomorfiei.

T e o r e m a 1. *Pe circumferința cercului de convergență* ** *al unui element oarecare se află cel puțin un punct singular al funcției.*

---

* Ele sînt independente de alegerea punctelor $a', b', \ldots$ în interiorul intervalelor semideschise respective, din cauza olomorfiei în interiorul fiecărui cerc al unui element.

** Se presupune aici că raza acestui cerc este finită, adică elementul considerat nu reprezintă, *el singur*, toată funcția (funcția *nu* este o funcție întreagă).

Dacă pe circumferința C_0 (fig. 13) nu este nici un punct singular, orice punct $\alpha \in C_0$ poate fi atins prin prelungire, în interiorul cercului C_0, pe raza corespunzătoare, și deci, oricărui punct α de pe C_0 îi corespunde un element de prelungire directă a lui (E_0) de centru α', interior cercului C_0 al lui (E_0), astfel încît α este cuprins în interiorul cercului lui $(E_{\alpha'})$.

Teorema lui B o r e l și L e b e s g u e, deja amintită, duce atunci la acoperirea circumferinței C_0 cu cercuri $(E_{\alpha'})$ în număr *finit*. Cum domeniul Γ format din aceste cercuri $(E_{\alpha'})$ și cercul C_0 cuprinde în interiorul său cercul C_0 ca și circumferința sa, iar pe de altă parte, în acest domeniu, funcția este olomorfă, se vede că cercul de convergență al elementului (E_0) trebuie să depășească cercul C_0 (cap. III, § 43), contrar ipotezei că acesta este cercul său de convergență. Deci, pe circumferința C_0 se află cel puțin un punct singular.

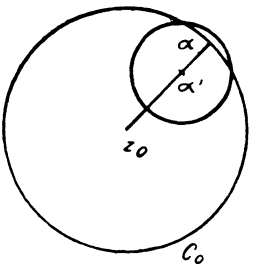


Fig. 13.

T e o r e m a 2. *Orice funcție olomorfă într-un domeniu oarecare D este o parte dintr-o funcție analitică.*

Fie $f(z)$ olomorfă în D și $z_0 \in D$.

Trebuie arătat că, de la elementul (E_0), care reprezintă pe $f(z)$ în z_0, se poate atinge, prin prelungire analitică, în D, oricare alt element cu centrul $z_1 \in D$ al funcției $f(z)$.

D fiind un domeniu, se poate uni z_0 cu z printr-un drum continuu L, interior lui D.

Fie δ marginea inferioară a distanțelor punctelor lui L la frontiera lui D. Cum L, compact, este interior lui D, avem $\delta > 0$. Efectuînd prelungirea în lungul lui L, orice element obținut va avea un cerc cu raza $\geqslant \delta$, deoarece în orice astfel de cerc cu centrul pe L, $f(z)$ este olomorfă. Deci cercurile de prelungire pe L nu pot avea raza tinzînd către zero cînd ne apropiem de z_1 pe L și deci z_1 va putea fi atins pe acest drum.

5. Uniformitate și multiformitate. O funcție analitică $f(z)$ care este astfel încît oricare ar fi drumul de prelungire parcurs se obține întotdeauna, în orice punct atins, același element (proprietatea unui punct al planului (z) de a fi ordinar sau singular pentru $f(z)$ nu depinde atunci de drumul parcurs) se numește o funcție *uniformă*.

O funcție neuniformă este o funcție *multiformă*; ea are într-un punct din (z) mai multe valori (și chiar în general o infinitate), cărora le corespund elemente distincte ale domeniului de existență al ei cu centrul în acel punct.

Proprietatea unei funcții de a fi uniformă sau multiformă este o proprietate globală, adică ea nu se manifestă pe o parte (porțiune) oarecare a ei.

Se numește *ramură* a unei funcții analitice acea parte a funcției care este definită de totalitatea elementelor obținute prin prelungire din (E_0) în lungul tuturor drumurilor *cuprinse într-un domeniu dat D* din planul (z). Ramura este definită prin D și prin elementul (E_0) al cărui centru z_0 trebuie să fie în D.

O ramură a unei funcții multiforme poate fi uniformă, adică astfel încît fiecărui punct din D, obținut prin prelungire în lungul drumurilor din D, să nu-i corespundă decît cel mult un element.

Funcțiile $\frac{e^z + 1}{z}$, $\sin \frac{1}{z^2 - 1}$, de exemplu, sînt funcții uniforme, ca și toate combinațiile raționale formate cu ele. Punctele lor singulare sînt, respectiv, $z = 0$, $z = \infty$ și $z = \pm 1$.

Funcțiile $\frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}$ și $\ln z$ sînt multiforme. Punctele lor singulare sînt, respectiv, $z = \pm i$ și $z = 0$, $z = \infty$.

Ramurile acestor funcții, care corespund unui domeniu D simplu conex oarecare, ce nu conține nici unul din aceste puncte, sînt, în baza teoremei din paragraful următor, ramuri uniforme.

Punctele singulare (de felul acestora din urmă) care sînt astfel încît o ramură ce corespunde unui domeniu oricît de mic cuprinzînd punctele respective este neapărat multiformă se numesc puncte *critice*.

6. Teorema monodromiei. Studiul funcțiilor multiforme și al singularităților lor fiind cu mult mai complicat decît al funcțiilor uniforme, criteriile de uniformitate pentru ramurile lor sînt utile.

Cel mai important se exprimă prin următoarea teoremă, numită teorema monodromiei:

Orice ramură corespunzătoare unui domeniu simplu conex D din (z) și care nu are nici o singularitate este o ramură uniformă și olomorfă.

Este suficient să arătăm că ramura este uniformă, faptul că ea nu are nici o singularitate atrăgînd apoi imediat olomorfia.

Fie D domeniul simplu conex în care este definită ramura funcției și $z_0 \in D$ centrul unui element (E_0) al acesteia.

Fie $z_1 \in D$ un punct diferit de z_0.

Trebuie arătat că două drumuri oarecare L_0 și L_1 din D, care unesc z_0 cu z_1, nu pot duce de la (E_0) la elemente distincte în z_1.

Un raționament cu totul analog aceluia care ne-a servit într-o altă împrejurare unde intervine tot conexiunea simplă a unui domeniu (cap. III, § 34) ne va duce repede la rezultat.

Din cauza conexiunii simple a lui D, L_0 și L_1 se pot deforma continuu unul în altul în interiorul lui D, menținînd fixe extremitățile lor. Există deci o funcție continuă $z(t, \lambda)$, cu valorile în D, de variabilele reale t și λ $\{(t, \lambda)$ este un punct din $[0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1]\}$, astfel încît $z(t, 0)$ și $z(t, 1)$ reprezintă, respectiv, L_0 și L_1, iar valorile $t = 0$, $t = 1$ reprezintă punctele z_0 și z_1 de pe aceste curbe, cu $z(0, \lambda) \equiv z_0$ și $z(1, \lambda) \equiv z_1$, oricare ar fi λ.

Fie L_λ drumul definit de $z = z(t, \lambda)$ cu λ fix.

Cercurile elementelor de prelungire în lungul lui L_λ formează un domeniu $\Delta_\lambda \subset D$.

În interiorul acestuia, prelungirea pe un drum $L_{\lambda'}$ cu $|\lambda' - \lambda| < \varepsilon$ (ε fiind ales > 0 și suficient de mic) duce de la (E_0) la același element (E_1), în z_1 *. Fiecărui λ fix din $(0,1)$ îi corespunde un asemenea ε. Teorema lui Borel-Lebesgue, aplicată intervalelor $|\lambda' - \lambda| < \varepsilon$, de acoperire a segmentului $[0, 1]$, duce atunci la un număr finit de intervale, din care două

* Aceasta se vede îndată dacă se înlocuiește mulțimea cercurilor de prelungire printr-un lanț finit (§ 2).

succesive au puncte comune. În toate aceste intervale, prelungirea pe L_λ duce deci la același element (E_1) în z_1 și propoziția este demonstrată.

În particular rezultă imediat din această teoremă că ramurile funcțiilor multiforme din paragraful precedent, determinate de domenii simple conexe din (z), care nu conțin puncte singulare ale funcției, sînt ramuri uniforme.

O b s e r v a ț i e. Teorema monodromiei joacă un rol important în studiul funcțiilor multiforme. Ea poate fi extinsă cu ușurință la cazul cînd, în D, ramura are numai singularități *izolate*, adică, în afară de o mulțime izolată (cap. I, § 7), nu posedă puncte singulare și aceste puncte *nu* sînt puncte critice pentru ea. Atunci ramura nu mai este olomorfă, dar ea este uniformă și nu are decît puncte singulare izolate.

Vom reveni asupra acestei chestiuni cînd vom trata mai pe larg despre funcțiile multiforme.

7. Teorema lui Poincaré și Volterra asupra funcțiilor multiforme. Funcțiile multiforme nu pot fi evitate în teoria funcțiilor, pentru motivul că funcțiile inverse ale celor mai simple chiar dintre funcțiile uniforme nu mai sînt uniforme și, cum arată funcția $\log z$ sau $\arcsin z$, nici nu au măcar un număr finit de determinări.

În aceste condiții, teorema următoare, datorită lui H. P o i n c a r é și lui V. V o l t e r r a, capătă o însemnătate deosebită.

T e o r e m ă. *O funcție analitică nu poate avea, într-un punct ordinar al ei, decît cel mult o infinitate numărabilă de determinări.*

În mod precis, toate elementele unei funcții analitice care au același centru z_1 nu pot forma decît o infinitate numărabilă cel mult.

Propoziția se demonstrează cu ușurință dacă se ține seamă de faptul că, în domeniul format de cercurile de prelungire, în lungul unui drum dat L ce unește z_0 cu z_1, orice drum și, în particular, orice linie poligonală care unește z_0 cu z_1 și străbate cercurile în aceeași ordine (cap. III, § 30) duce de la (E_0) la același (E_1) în z_1 *.

Este deci suficient să facem prelungirea după liniile poligonale oarecare, care unesc z_0 cu z_1. Or, aceste linii poligonale pot fi alese astfel încît vîrfurile lor, altele decît extremitățile z_0 și z_1, să fie puncte cu coordonate raționale. Se arată atunci, cu ușurință că mulțimea acestora este numărabilă, pentru z_0 și z_1 ficși.

Într-adevăr, din z_0 nu pornesc decît o infinitate numărabilă de segmente, avînd extremitatea cealaltă într-un punct cu coordonate raționale. Cum același lucru este adevărat pentru segmentele care pornesc din această din urmă extremitate, se vede că liniile poligonale care au vîrfurile intermediare în puncte cu coordonate raționale și care au cel mult n laturi sînt în infinitate numărabilă. Pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$, avem deci, în total, o infinitate numărabilă de linii poligonale de acest fel între z_0 și z_1. Elementele posibile în z_1, pentru funcția dată, formează deci, cel mult, o infinitate numărabilă.

* A se vedea nota de la pagina precedentă.

II. PUNCTE SINGULARE PE CIRCUMFERINȚA CERCULUI DE CONVERGENȚĂ A UNUI ELEMENT

8. Am văzut (§ 4) că pe circumferința cercului de convergență al unui element se află întotdeauna cel puțin un punct singular. Vom da acum o teoremă, datorită lui J. Hadamard și lui A. Pringsheim, care permite, în unele cazuri, să determinăm un punct singular pe această circumferință.

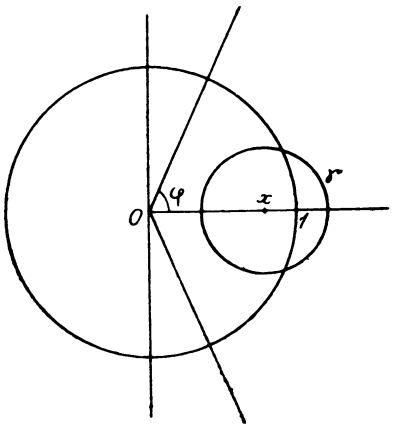


Fig. 14

Teorema. *Dacă coeficienții c_n ai elementului definit prin*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

sînt așezați în planul (z), într-un unghi $2\varphi < \pi$, cu vîrful în O și avînd ca bisectoare axa reală pozitivă, și dacă raza R de convergență a seriei de mai sus este finită, atunci punctul $z = z_0 + R$ este un punct singular pentru funcția analitică generată de elementul dat.

Putem presupune evident $z_0 = 0$ și $R = 1$, ceea ce se obține făcînd schimbarea de variabilă $z - z_0 = Rz'$. Trebuie arătat deci că elementul definit prin seria

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

cu raza de convergență $= 1$, duce în $z = 1$ la un punct singular.

Dacă $z = 1$ ar fi ordinar (fig. 14), ar exista un x pozitiv < 1, astfel ca elementul cu centrul x, obținut prin prelungirea directă a lui $S(z)$, să aibă o rază de convergență $> 1 - x$, adică cercul de convergență γ al acestui element să cuprindă, în interiorul său, pe $z = 1$.

Seria acestui element se scrie, însemnînd prin $S^{(n)}(z)$ derivata de ordin n a lui $S(z)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x)}{n!} (z - x)^n \qquad \left[\text{cu } S^{(0)}(x) = S(x) \text{ și } \frac{1}{0!} = 1\right]. \tag{1}$$

Sub formă de serie dublă (1) se scrie

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m + (z - x) \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} + \ldots$$
$$+ (z - x)^n \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} c_m x^{m-n} + \ldots \tag{2}$$

Trebuie să existe deci un număr $\varepsilon > 0$ astfel încît, pentru $z = 1 + \varepsilon$, această serie (2) să fie convergentă.

Să punem $c_n = a_n + ib_n$, cu a_n și b_n reali. Cum a_n sînt toți $\geqslant 0$, partea reală a lui (2), pentru $z = 1 + \varepsilon$, are toți termenii * pozitivi; ea converge deci absolut, iar partea imaginară converge și ea absolut din cauza relației

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right| \leqslant \operatorname{tg} \varphi, \text{ cu } 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Deci, în seria dublă (2), ordinea termenilor poate fi schimbată arbitrar. Grupîndu-i în mod convenabil, regăsim pe $S(z)$ de mai sus **.

Ar rezulta deci că seria $S(z)$ este convergentă pentru $z = 1 + \varepsilon$, ceea ce contrazice faptul că raza ei de convergență este 1.

9. O b s e r v a ț i e. Enunțul teoremei din paragraful precedent poate fi lărgit cum se vede ușor: mai întîi unghiul 2φ poate fi înlocuit cu un unghi oarecare $< \pi$, cu vîrful în O.

Într-adevăr, o înmulțire a seriei cu o constantă $e^{\theta i}$, cu θ convenabil ales, duce îndată la cazul precedent, fără a schimba, evident, poziția punctelor singulare.

Pe de altă parte, condiția privitoare la poziția coeficienților în planul (z) poate să *nu* fie satisfăcută, pentru un număr *finit* dintre ei. Într-adevăr, scăzînd atunci din $S(z)$ un polinom convenabil, obținem o serie în care toți coeficienții satisfac condiția, iar punctele singulare rămîn aceleași, polinomul neavînd nici un punct singular în tot planul finit.

10. Sub forma particulară în care $\varphi = 0$, adică unde toți coeficienții c_n sînt reali și pozitivi, teorema a fost dată de J. H a d a m a r d, încă pe la sfîrșitul secolului trecut, împreună cu un număr de alte teoreme importante, referitoare la punctele singulare de pe cercul de convergență al seriilor tayloriene. Rezultate de această natură formează azi un corp întreg de doctrină, care a fost dusă departe de J. H a d a m a r d și de elevii săi și care se poate urmări în monografii speciale ***.

Încă înainte ca aceste cercetări să fi fost întreprinse în mod sistematic, K. W e i e r s t r a s s, care a dat pentru prima oară definiția prelungirii analitice a unui element, arătase, printr-un exemplu, că există elemente tayloriene pentru care *orice punct de pe circumferința cercului de convergență* este un punct singular, adică această circumferință este pe toată întinderea ei o *linie singulară*. Prelungirea analitică a unui asemenea element, dincolo de cercul său, este deci imposibilă, iar funcția analitică corespunzătoare se reduce la acest element (și bineînțeles la cele obținute prin prelungire *directă* din el; cercurile de convergență ale acestora nu depășesc însă, nici unul, cercul elementului inițial). O astfel de funcție (ca și o funcție întreagă) este deci reprezentată complet de un singur element al ei.

---

* Este vorba de termenii lui (2) considerată ca serie *dublă*.

** Seria (2) se obține din $S(z)$, punînd $z = (z - x) + x$ și ordonînd după $(z - x)^n$. Se trece invers, de la (2) la $S(z)$ grupînd termenii în mod convenabil.

*** A se vedea, de exemplu, J. H a d a m a r d și S. M a n d e l b r o j d t, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Paris, 1926.

11. Exemplul lui Weierstrass al unei serii tayloriene care nu poate fi prelungită dincolo de cercul ei de convergență se poate construi în modul următor:

Fie b o cantitate complexă de modul $\leqslant 1$ și c un număr natural $\geqslant 2$. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{c^n} \tag{3}$$

are ca rază de convergență pe 1, cum se constată cu ușurință.

Vom arăta că orice punct de pe $|z| = 1$ este un punct singular pentru funcția analitică generată de (3).

După teorema 1 din § 4, pe $|z| = 1$ se află cel puțin un punct singular. Printr-o schimbare de variabilă simplă (o rotație în jurul lui $z = 0$), putem face ca acesta să fie $z = 1$.

Deci (3) are ca punct singular pe $z = 1$.

Dacă vom reuși să arătăm că orice punct

$$z = e^{2\pi i \frac{p}{c^q}} \tag{4}$$

unde p și q sînt numere naturale oarecare, este singular, vom fi arătat că și *orice* punct de pe $|z| = 1$ este singular. Într-adevăr, punctele (4) formează, pe $|z| = 1$, o mulțime densă; or, se știe că orice punct ordinar este centrul unui cerc, în care nu se află decît puncte ordinare.

În (3) să facem schimbarea de variabilă

$$z = z' e^{2\pi i \frac{p}{c^q}}. \tag{5}$$

Este clar că, în seria transformată, coeficienții vor fi aceiași cu cei din (3), îndată ce n va fi $\geqslant q$. Deci, funcția definită de seria transformată va diferi de cea definită prin (3) numai printr-un polinom, care nu poate avea puncte singulare pe $|z| = 1$.

Așadar, seria transformată va avea aceleași puncte singulare ca și (3), în particular $z' = 1$ va fi punct singular.

Dar aceasta arată că, pentru (3), $z = e^{2\pi i \frac{p}{c^q}}$ este punct singular și aceasta pentru orice p și q numere naturale.

Circumferința $|z| = 1$ este deci linie singulară pentru (3).

12. Examinînd mai aprofundat exemplul dat de K. W e i e r s t r a s s, J. H a d a m a r d a dat următoarea condiție suficientă pentru ca o serie taylorianã

$$c_0 + c_1 z^{\lambda_1} + c_2 z^{\lambda_2} + \ldots + c_n z^{\lambda_n} + \ldots,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sînt numere naturale crescînde, să aibă circumferința

cercului său de convergență ca linie singulară: este suficient să existe un număr pozitiv θ astfel ca, oricare ar fi n, să avem

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \theta\lambda_n.$$

În exemplul dat de K. Weierstrass avem $\theta = c - 1$.

Propoziția aceasta datorită lui J. Hadamard a fost încă generalizată, în mod foarte larg, de A. Ostrovski *.

III. METODĂ DE PRELUNGIRE ANALITICĂ EFECTIVĂ: PRINCIPIUL SIMETRIEI

13. Definiția prelungirii analitice a unui element oarecare, pe care am dat-o mai sus (§§ 1 și 2), indică un procedeu general regulat de a efectua această prelungire, procedeu care nu are însă decît o valoare teoretică dacă facem excepție de unele cazuri particulare simple.

Pentru a construi efectiv funcția prelungită a unei funcții olomorfe date, se întrebuințează, de obicei, *principiul simetriei*, indicat de H. A. Schwarz, care, în cazuri importante ce se întîlnesc în numeroase aplicații, duce la construirea efectivă a prelungirii.

14. Să considerăm o funcție $f(z)$, olomorfă într-un domeniu jordanian D al planului (z), a cărui curbă frontieră conține un segment de dreaptă s de pe axa reală a lui (z). Funcția $f(z)$ este presupusă *continuă și pe* s, iar valorile pe care $f(z)$ le ia pe acest segment *sînt presupuse reale*, astfel încît imaginea lui s prin $u = f(z)$ este un segment al axei reale a planului (u).

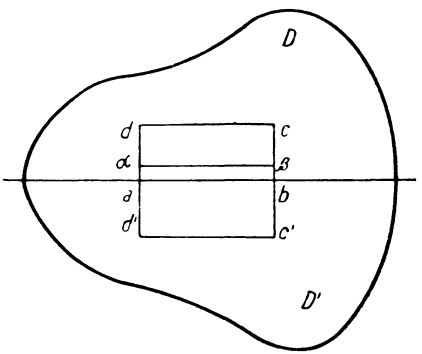


Fig. 15

În aceste condiții, *principiul simetriei al lui Schwarz* se enunță astfel: funcția $F(z)$ definită ca identică cu $f(z)$ în $D + s$, iar în domeniul simetric D' al lui D față de axa reală a planului (z), definită prin $F(\bar{z}_0) = \overline{u_0}$, unde $\bar{z}_0$ este conjugatul lui $z_0 \in D$, iar $\bar{u}_0$ este conjugatul lui $u_0 = f(z_0)$, *reprezintă prelungirea analitică a lui* $f(z)$ *în* D', *adică* $F(z)$ *este olomorfă în domeniul* $D + s + D'$. Este clar că funcția $F(z)$ definită mai sus este continuă în $D + s + D'$ (fig. 15). Ea este, pe de altă parte, olomorfă în D prin ipoteză, iar în D', prin modul cum a fost construită. Rămîne de arătat că ea este olomorfă în lungul

* A se vedea, de exemplu, L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Leipzig-Berlin, 1927, t. II, unde sînt date și alte teoreme în aceeași ordine de idei.

lui s, adică pe o porțiune oarecare a segmentului s. Fie ab o asemenea porțiune și $abcd$ un dreptunghi cuprins în $D + s$. Fie z un punct fix din interiorul acestui dreptunghi. Dacă însemnăm prin Γ periferia lui $abcd$, integrala

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

are un sens perfect definit, deoarece Γ este rectificabil și $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ continuu pe Γ. Vom evalua diferența

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z). \tag{6}$$

Avem, $\alpha\beta$ fiind o paralelă la ab,

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\alpha\beta cd\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{\beta\alpha ab\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{7}$$

integrala în lungul lui Γ fiind luată întotdeauna în sens direct.

În (7), prima integrală din membrul al doilea este, în baza formulei integrale a lui Cauchy, egală cu $2\pi i f(z)$, astfel încît (6) este egală cu ultima integrală din (7). Pe de altă parte, membrul întîi din (7) este independent de distanța $h = a\alpha$, a paralelei $\alpha\beta$ la ab.

Deci și integrala

$$\int_{\beta\alpha ab\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{8}$$

este independentă de h. Or, (8) se descompune în

$$\int_{\beta\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{\alpha a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{ab} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{b\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{9}$$

Cum $f(z)$ este continuă în $D+s$, h poate fi luat destul de mic pentru ca $\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta + hi)}{\zeta + hi - z} \right| < \varepsilon$ cînd ζ descrie ab, ε fiind un număr pozitiv arbitrar dat.

Dacă $M > |f(z)|$ în tot dreptunghiul $abcd$, se vede atunci că, după (9), integrala (8) este inferioară, în modul, sumei

$$2h\frac{M}{\delta} + \varepsilon \cdot \overline{ab},$$

unde δ este minimul distanței lui z (fix) la Γ, iar $\overline{ab}$ este lungimea lui ab.

Cum ε și h pot fi luați oricît de mici, iar (8) este independentă de aceste cantități, rezultă că integrala (8) este nulă și deci că (6) este egală cu zero.

Deci, oricare ar fi $z \in D$, avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \; *. \tag{10}$$

Dacă acum z este un punct în afară de dreptunghiul de periferie Γ, integrala din membrul al doilea a lui (10) este nulă (cap. III, § 36). Deci, însemnînd prin Γ' conturul simetric al lui Γ față de ab, și prin Π conturul $dd'c'cd$,

$$F(z) = f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

pentru orice $z \in abcd$.

În mod analog avem, pentru orice $z' \in a\ b\ c'\ d'$,

$$F(z') = \overline{f(\bar{z}')} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z'}\, d\zeta.$$

Funcția $\Phi(z)$, definită prin

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

în tot interiorul dreptunghiului $dd'c'c$ mărginit de Π, este continuă și *olomorfă* în acest domeniu. Ea este egală cu $F(z)$ în interiorul lui $abcd$ ca și în interiorul lui $abc'd'$. Dar și $F(z)$ este continuă în $dd'c'c$. Deci, $F(z) = \Phi(z)$ în tot acest domeniu și, prin urmare, și $F(z)$ este olomorfă în el, în particular pe segmentul ab. Dar ab este o porțiune oarecare a lui s, deci $F(z)$ este olomorfă în $D + s + D'$.

15. Principiul simetriei admite importante extensiuni. Astfel, segmentul s din conturul lui D poate fi înlocuit cu un *arc de cerc oarecare* [în particular, cu un segment de dreaptă cu poziție oarecare în planul (z)].

Condiția ca valorile lui $f(z)$ pe segmentul s să fie reale trebuie atunci înlocuită prin următoarea: *imaginea arcului de cerc prin* $u = f(z)$ *este un arc de cerc* (în particular, un segment de dreaptă) *din planul* (u).

Această extensiune se obține numaidecît schimbînd variabila z printr-o transformare liniară (cap. III, § 10) care, după cum se știe, conservă simetria (cap. III, § 12) și aplicînd apoi o transformare liniară analogă și lui u.

Fie z' și u' noile variabile. Funcția care leagă u' de z' se găsește exact în condițiile din paragraful precedent, iar transformarea liniară păstrează olomorfia. Deci *dacă* $f(z)$ *este olomorfă în domeniul* D *din planul* (z) *al cărui contur cuprinde un arc de cerc* s, *și dacă* $f(z)$ *este continuă pe* $D + s$ *și transformă pe* s *într-un arc de cerc* σ *al planului* (u), $f(z)$ *se poate prelungi analitic, prin simetrie, dincolo de arcul de cerc* s, *luînd, în puncte simetrice față de cercul ce poartă pe* s, *valori simetrice față de cercul ce poartă pe* σ.

---

* Reamintim că formula integrală a lui Cauchy a fost demonstrată (cap. III, § 39) numai cînd $f(z)$ este *olomorfă* și pe *întreg conturul de integrare*. În (10) $f(z)$ este numai continuă pe o parte a lui Γ, anume pe ab. Acest fapt necesită demonstrația de mai sus.

Sub forma aceasta, principiul simetriei este extrem de util; el permite în unele cazuri determinarea în tot domeniul de existență a unor funcții date numai într-un anumit domeniu. Se poate arăta, de exemplu, astfel, direct — fără a mai recurge la lema lui Schwarz (cap. II, § 29) — că singurele transformări conforme ale unui cerc în alt cerc sînt transformările liniare.

Lăsăm cititorului să facă demonstrația acestui fapt.

16. O altă generalizare a principiului simetriei, deși nu duce la un procedeu de prelungire efectivă ca în cazurile din §§ 14 și 15, are totuși o importanță teoretică foarte mare, întrucît ea arată că, în anumite condiții generale, prelungirea *este posibilă* dincolo de un anumit arc de curbă al frontierei domeniului de olomorfie dat și, prin urmare, că pe acest arc de curbă nu se află nici un punct singular.

Un arc de curbă din planul (z) definit prin

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \text{ cu } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

cu $x(t)$ și $y(t)$ continue pe segmentul $[0, 1]$ este numit *analitic* dacă, în jurul oricărui $t_0 \in [0, 1]$, avem

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \alpha_1 (t - t_0) + \alpha_2 (t - t_0)^2 + \dots \\ y(t) &= y_0 + \beta_1 (t - t_0) + \beta_2 (t - t_0)^2 + \dots, \end{aligned} \tag{11}$$

cu $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ *.

Teoremă. *Dacă $f(z)$, olomorfă în domeniul jordanian D, este continuă și pe arcul analitic s făcînd parte din conturul lui D și dacă $u = f(z)$ transformă pe s într-un arc analitic σ al planului (u), $f(z)$ se poate prelungi analitic dincolo de s, adică pe s nu întîlnim nici un punct singular al lui $f(z)$ în această prelungire.*

Este suficient să arătăm, raționînd ca la paragraful precedent, că putem, în jurul fiecărui punct al lui s, să facem o schimbare de variabilă, printr-o transformare conformă, care să transforme pe s într-un segment al axei reale din noul plan al variabilei. O transformare analogă aplicată lui σ ne va duce atunci la cazul din § 14. Cum olomorfia se păstrează prin transformări conforme, teorema va fi astfel demonstrată.

Fie

$$z_0 = x_0 + iy_0.$$

Să considerăm transformarea

$$z = z_0 + (\alpha_1 + i\beta_1) z' + (\alpha_2 + i\beta_2) z'^2 + \dots + (\alpha_n + i\beta_n) z'^n + \dots, \tag{12}$$

care este biunivocă în vecinătatea lui $z' = 0$, $z = z_0$ (din cauză că $|\alpha_1 + i\beta_1| \neq 0$), și deci conformă (cap. III, § 4). Or, (12) se reduce la arcul definit prin (11), cînd z' variază pe axa reală a lui (z') în jurul lui $z' = 0$.

Deci, în (12), avem o transformare conformă, care transformă vecinătatea lui z_0 a arcului s, într-un segment al axei reale din (z').

Teorema este astfel demonstrată.

* Scopul acestei din urmă condiții este să putem scrie ecuația arcului în vecinătatea lui (x_0, y_0), fie $y = \varphi(x)$, fie $x = \psi(y)$.

17. Ca aplicație a rezultatului precedent, să considerăm funcția lui Weierstrass, definită în § 11.

Se vede îndată că funcția este conținută pe $|z| = 1$, continuă pe $|z| \leqslant 1$.

Conform rezultatului din paragraful precedent, dacă imaginea lui $|z| = 1$ ar conține un arc analitic, funcția ar trebui să se poată prelungi dincolo de această circumferință. Or, s-a arătat mai sus că $|z| = 1$ este linie singulară pentru funcția considerată. Deci, funcția lui Weierstrass din § 11 dă o imagine a circumferinței $|z| = 1$ care *nu este analitică în nici o porțiune a ei.*

IV. SINGULARITĂȚI ALE RAMURILOR UNIFORME DE FUNCȚII ANALITICE

18. Fie Δ un domeniu din (z), care definește o ramură uniformă $f(z)$ a unei funcții analitice. În Δ, ramura $f(z)$ poate avea puncte singulare.

Fie S mulțimea acestor puncte și fie G mulțimea punctelor ordinare ale lui $f(z)$.

Mulțimea G este neapărat deschisă, $\Delta - G$ este deci închisă în Δ.

Nu orice punct din $\Delta - G$ face neapărat parte din S; după definiția punctelor singulare, este formată numai din punctele lui $\Delta - G$, care sînt *accesibile din G*, adică care sînt astfel încît există un drum continuu în G, având numai o extremitate în acel punct.

Deci S nu este neapărat închisă în Δ.

19. Considerăm în special cazul (fundamental din acest punct de vedere) în care $\Delta - G$ (și deci S) se reduce la un singur punct.

Cazul acesta, al *punctului singular izolat*, a dat loc la teoreme clasice, din care primele rezultate sînt datorite chiar fondatorilor teoriei funcțiilor complexe.

Teorema lui Cauchy și Riemann. *În vecinătatea unui punct singular izolat, o ramură uniformă $f(z)$ a unei funcții analitice nu poate fi mărginită.*

Se presupune că $f(z)$ ar fi mărginită în vecinătatea punctului singular izolat a. Fără a restrînge generalitatea putem presupune că avem $|f(z)| < M$ pe Δ.

Fie D un domeniu jordanian care, împreună cu conturul său C, face parte din Δ (fig. 16).

În interiorul lui D, să descriem un cerc γ cu centrul în a. Punctul z fiind oarecare în D, dar exterior lui γ, avem, după integrala lui Cauchy,

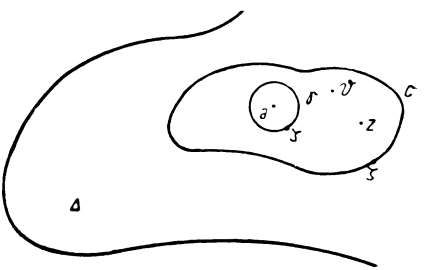


Fig. 16

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{13}$$

Relația (13) are loc oricare ar fi circumferința γ cu centrul în a situată în D; deci integrala ultimă nu depinde de raza r a lui γ.

Avem însă

$$\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \leqslant 2\pi r\,\frac{M}{\delta},$$

unde δ reprezintă distanța minimă de la z la circumferința γ.

Cînd r tinde către zero, δ crește, și deci membrul al doilea al inegalității tinde către zero cu r. Aceasta arată că a doua integrală din (13) este nulă și deci că avem, pentru orice $z \in D$, care este distinct de punctul a,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

Dar membrul din dreapta al acestei inegalități este o funcție olomorfă în tot D. Deci a nu poate fi punct singular pentru $f(z)$, contrar ipotezei, și deci presupunerea $|f(z)| < M$ în vecinătatea lui a nu este admisibilă.

O b s e r v a ț i e. Teorema de mai sus este o generalizare a teoremei lui Liouville (cap. III, § 46).

Într-adevăr, o funcție întreagă este uniformă și olomorfă în tot planul $z \neq \infty$ și are un punct singular izolat la ∞.

Teorema demonstrată aici arată că în vecinătatea acestui punct ea nu poate să fie mărginită, adică nu poate să fie mărginită în tot planul. Or, aceasta este tocmai teorema lui Liouville.

20. Cazul particular cel mai simplu al unui punct singular izolat este cazul cînd $z = a$ este un *pol*. Dar există puncte singulare izolate ale funcțiilor uniforme care *nu* sînt poli, cum este, de exemplu, punctul $z = 0$ pentru funcția $u = e^{\frac{1}{z}}$. Astfel de puncte singulare se numesc *esențiale*.

Teorema din paragraful precedent era evidentă pentru poli, după însăși definiția lor (cap. II, § 15). Ea exprimă însă un fapt nou pentru punctele singulare esențiale, fapt din care vom deduce o teoremă fundamentală a lui Weierstrass, relativă la comportarea ramurilor uniforme în jurul punctelor lor singulare esențiale izolate.

T e o r e m a lui W e i e r s t r a s s. *Într-un punct singular izolat esențial, o ramură uniformă a unei funcții analitice este complet nedeterminată.*

În mod precis: *oricare ar fi valoarea complexă dată b și oricare ar fi cantitățile reale pozitive ε și η date, există un punct z_1, pentru care avem simultan*

$$\begin{aligned} |z_1 - a| &< \varepsilon \\ |f(z_1) - b| &< \eta. \end{aligned} \tag{14}$$

Dacă luăm $\varepsilon = \eta = \frac{1}{n}$, și dăm lui n, succesiv, valorile $1, 2, 3, \ldots$, se vede că această din urmă formulare a teoremei este echivalentă cu faptul că b fiind dat arbitrar, există un șir de puncte z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ tinzînd către a și astfel ca $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = b$.

În baza teoremei lui Cauchy și Riemann din paragraful precedent, faptul este adevărat pentru $b = \infty$, dacă limitei de mai sus îi dăm sensul obișnuit.

Demonstrația existenței lui z_1 în condițiile (14) se dă cu ușurință tot în baza teoremei din paragraful precedent.

Să considerăm într-adevăr funcția $\varphi(z)$, uniformă în Δ, definită prin

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - b}.$$

Dacă ea are poli în orice vecinătate a lui $z = a$, aceasta înseamnă că $f(z) = b$ are soluții în orice astfel de vecinătate, și deci propoziția este demonstrată.

Dacă $\varphi(z)$ nu admite poli într-o vecinătate a lui $z = a$, aceasta înseamnă că $\varphi(z)$ este olomorfă în această vecinătate, în afară poate de $z = a$. Dacă $z = a$ ar fi, și el, punct ordinar pentru $\varphi(z)$, el ar trebui să fie un pol pentru $f(z) - b$ și deci pentru $f(z)$, contrar ipotezei. Deci, $\varphi(z)$ are în $z = a$ un punct singular.

Fie atunci γ cercul cu centrul în a și cu raza ε.

În γ, $\varphi(z)$ nu poate fi mărginită, după teorema precedentă. Deci, există în γ un punct z_1, în care avem

$$|\varphi(z_1)| = \frac{1}{|f(z_1) - b|} > \frac{1}{\eta}$$

și deci

$$|f(z_1) - b| < \eta$$

și, cum z_1 este în γ, avem și

$$|z_1 - a| < \varepsilon,$$

adică avem relațiile (14).

21. Extensiuni și completări diverse ale teoremei precedente a lui Weierstrass. Teorema de mai sus a dat loc la o foarte importantă completare, azi clasică, adusă încă din 1879 de către É. Picard, și de care vom vorbi mai tîrziu.

Teorema lui Picard stă la baza întregii teorii moderne a repartiției valorilor funcțiilor analitice, una din ramurile cele mai importante ale teoriei funcțiilor.

În altă direcție, teorema lui Weierstrass a fost generalizată, înlocuindu-se punctul izolat a printr-o mulțime singulară.

Fie S mulțimea singulară a ramurii uniforme $f(z)$ în Δ. Dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, este posibil să includem mulțimea S într-un număr finit de cercuri de rază $< \varepsilon$ și astfel ca suma lungimilor circumferințelor lor să fie, și ea, $< \varepsilon$, atunci se spune că S este de lungime nulă.

Există și mulțimi infinite nenumărabile de lungime nulă.

P. Painlevé, D. Pompeiu și A. Bezicovici au arătat că, în vecinătatea oricărui punct al lui S, dacă S este de lungime

nulă, $f(z)$ nu poate fi mărginită. Se poate deduce de aici că teorema de mai sus a lui Weierstrass este valabilă pentru orice punct al lui S care *nu* este pol.

În cazul unei mulțimi singulare, care nu este de lungime nulă, dar este totuși discontinuă, D. P o m p e i a arătat, în 1905, printr-un exemplu devenit celebru, că în unele cazuri funcția poate fi chiar continuă pe întreaga mulțime singulară a ei. Cazurile acestea au fost extinse de către V. V. G o l u b e v și de către P. U r s o n și au dat naștere la o serie de lucrări importante, mai ales în Uniunea Sovietică și în Polonia*.

Pe de altă parte, teorema lui Weierstrass se extinde la unele clase de funcții multiforme**. În cazul acesta, ea apare strîns legată de o proprietate importantă a acestor funcții.

22. Reprezentarea analitică în vecinătatea unui punct singular izolat al unei ramuri uniforme se poate face cu ajutorul seriei Laurent (cap. III, § 47).

Coroana circulară în care o asemenea reprezentare este posibilă poate fi luată, într-adevăr, astfel ca ea să cuprindă orice punct dintr-o vecinătate a lui $z = a$, care este distinct de a.

Avem, așadar, în vecinătatea punctului a,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \tag{15}$$

Din dezvoltarea de mai sus, partea zisă „principală", adică

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots, \tag{16}$$

nu poate lipsi dacă a este un punct singular, deoarece altfel, seria din (15) se reduce la o serie taylorianã.

Dacă (16) cuprinde un număr finit de termeni, $z = a$ este un pol. În caz contrar, cum reprezentarea prin (15) este unică, punctul $z = a$ este singular esențial.

În particular, această dezvoltare arată că o funcție întreagă care *nu* este un polinom (adică o funcție întreagă transcedentă) are, în $z = \infty$, un punct singular esențial.

Teorema lui Weierstrass arată deci că, oricare ar fi b (finit sau ∞), există un șir de puncte, tinzînd către ∞, pe care $f(z)$ tinde către b.

23. Să presupunem că $f(z)$, în loc să fie olomorfă ca mai sus în $\Delta - a$, este meromorfă în acest domeniu și că polii ei au, în $z = a$, un punct de acumulare. Atunci, $z = a$ nu mai poate fi în nici un caz un pol (polii fiind

---

* Se poate consulta pentru aceste chestiuni bibliografia dată în lucrarea lui I. K a u f m a n „Analele Acad. R.P.R.", Seria Mat., Fiz., Chim., t. III, 1950.

** S. S t o i l o w, „Mathematica", t. XII, 1936, p. 123 și t. XIX, 1943, p. 138.

izolați, după cum știm). Punctul $z = a$ este atunci un *punct singular esențial, punct de acumulare de poli.*

Dar, raționamentul din § 20 rămîne perfect valabil, și deci teorema lui Weierstrass, demonstrată mai sus, se extinde numaidecît și la cazul unui punct singular limită de poli ai unei ramuri uniforme a unei funcții analitice*.

Bineînțeles că nu mai poate fi vorba de reprezentare în jurul unui asemenea punct singular printr-o serie Laurent, o astfel de serie (15) reprezentînd o funcție olomorfă în orice coroană circulară cu centrul în $z=a$.

Înainte de a trece la studiul diverselor clase de funcții analitice, caracterizate prin singularitățile lor, vom da, în capitolul următor, cîteva propoziții relative la șirurile de funcții olomorfe și la reprezentarea conformă a unui domeniu pe cercul unitate, propoziții care ne vor servi la construirea și, mai tîrziu, la clasificarea funcțiilor analitice.

---

* De altfel, dacă ținem seama de extensiunea indicată în § 21, funcția $f(z)$ considerată aici, avînd *în vecinătatea lui* $z = a$, o mulțime singulară de lungime nulă satisface prin aceasta, într-o vecinătate a lui $z = a$, teorema lui Weierstrass.

CAPITOLUL V

ŞIRURILE DE FUNCŢII OLOMORFE ŞI TEOREMA FUNDAMENTALĂ A REPREZENTĂRII CONFORME

I. ŞIRURI UNIFORM CONVERGENTE DE FUNCŢII OLOMORFE

1. Noţiunea de convergenţă uniformă a unui şir de funcţii permite transportarea anumitor proprietăţi (cum este, de exemplu, continuitatea) de la termenii şirului la funcţia limită.

Teorema următoare, datorită tot lui K. Weierstrass, arată că olomorfia este şi ea una din acele proprietăţi.

Teorema lui Weierstrass asupra şirurilor de funcţii olomorfe. *Fiind dat un şir de funcţii* $f_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *toate olomorfe în domeniul* D, *şir uniform convergent în interiorul lui* D, *funcţia*

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z),$$

definită în tot domeniul D, *este şi ea olomorfă în* D. *În plus, oricare ar fi numărul natural* k, *avem* $\lim_{n\to\infty} \frac{d^k f_n(z)}{dz^k} = \frac{d^k F(z)}{dz^k}$ (*adică şirul este derivabil termen cu termen*).

Înţelegem prin *convergenţă uniformă în interiorul lui* D că şirul dat este uniform convergent* în orice domeniu închis mărginit $\subset D$.

Fie Δ un domeniu jordanian, limitat de curba rectificabilă C şi astfel ca $\overline{\Delta} = \Delta + C \subset D$.

Fie ζ un punct arbitrar pe C şi z un punct oarecare fix în interiorul lui Δ.

Avem, după formula integrală a lui Cauchy, oricare ar fi n,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{1}$$

---

* A se vedea *Introducerea*, § 3.

Pe C, șirul $\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}$ de funcții de ζ este uniform convergent, după ipoteză. Avem deci, exact pentru același motive, ca și în cazul funcțiilor reale, ca o consecință a convergenței uniforme,

$$\lim_{n\to\infty}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Deci, după (1), oricare ar fi $z\in\Delta$, avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{2}$$

Dar integrala din membrul al doilea din (2) reprezintă o funcție de z, olomorfă în Δ (cap. III, § 40). Prin urmare,

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

este olomorfă în Δ și, cum Δ poate cuprinde un domeniu închis mărginit arbitrar în D, $F(z)$ este olomorfă în tot domeniul D.

Prima parte a teoremei este astfel demonstrată.

Pentru a demonstra că limita derivatelor lui $f_n(z)$ este derivata (de același ordin) a lui $F(z)$, este suficient să repetăm raționamentul de mai sus asupra șirului de funcții de ζ definite pe C,

$$\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

și să ținem seama de faptul că, pe de o parte,

$$\frac{d^k f_n(z)}{dz^k} = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta$$

iar, pe de altă parte,

$$\frac{d^k}{dz^k}\int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = k!\int_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

2. Teorema de mai sus arată că faptul că un șir de funcții $f_n(z)$, olomorfe în același domeniu D, este uniform convergent în interiorul lui D permite nu numai să afirmăm că funcția limită $F(z)$ este și ea olomorfă în D, dar și că derivatele succesive ale lui $F(z)$ se obțin ca limite ale derivatelor de același ordin ale termenilor șirului. Astfel, această din urmă proprietate, stabilită pentru seriile de puteri (cap. II, § 8), se extinde la seriile oarecare de funcții olomorfe în D care sînt uniform convergente în interiorul lui D.

K. Weierstrass a demonstrat propoziția de mai sus fără a face uz de integrala lui Cauchy, pe cale așa-zisă *elementară*, adică bazîndu-se

numai pe dezvoltarea în serie taylorianã a funcțiilor olomorfe. Dar demonstrația dată mai sus, cu ajutorul integralei lui Cauchy, nu numai că este aproape imediată, dar permite și o altă formulare a teoremei, formulare care, în multe cazuri, se dovedește utilă. Ajunge, într-adevăr, să observăm că nu am făcut uz, în demonstrația din paragraful precedent, decît de convergența uniformă *pe conturul* C al lui Δ. Putem deci enunța propoziția următoare:

Fie D un *domeniu jordanian*, limitat de curba rectificabilă C, și $f_n(z)$ un șir de funcții *olomorfe* pe $\overline{D} = D + C$, *uniform convergent* pe C. Atunci $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ există în D și această limită este o funcție olomorfă în D. Convergența este uniformă în interiorul lui D și șirul este derivabil termen cu termen.

3. Am arătat (cap. III, § 42) că o funcție olomorfă într-o coroană circulară (deci indiferent care ar fi singularitățile pe care le-ar pune în evidență prelungirea analitică a funcției, dincolo de coroana circulară, înspre ∞ sau înspre centrul ei) se poate reprezenta, în această coroană, printr-o serie de tip Laurent. Această serie cuprinde termeni care posedă o singularitate în centrul coroanei.

Se poate pune atunci întrebarea: nu este oare posibilă dezvoltarea funcțiilor olomorfe în coroana circulară într-o serie uniform convergentă în interiorul coroanei, de funcții olomorfe care să nu aibă singularități în porțiunea de plan închisă de această coroană?

Formularea din § 2 a teoremei lui Weierstrass arată că o asemenea dezvoltare *nu* este posibilă pentru *orice* funcție olomorfă *numai* în coroana circulară.

Într-adevăr convergența uniformă, pe o circumferință concentrică și interioară coroanei, a seriei care ar reprezenta, în aceste condiții, funcția ar implica olomorfia sumei seriei, deci a funcției date chiar și în porțiunea închisă de coroana circulară.

Nu există deci serii mai simple ca cele de tip Laurent din acest punct de vedere, care să le poată înlocui.

II. FAMILII MĂRGINITE DE FUNCȚII OLOMORFE

4. Spunem că o mulțime de funcții $\{f(z)\}$, toate olomorfe în același domeniu D, formează o familie *mărginită în interiorul lui* D, dacă oricare ar fi domeniul *închis* $\overline{\Delta}$, mărginit și cuprins în D, există un număr pozitiv $M_{\overline{\Delta}}$, depinzînd de $\overline{\Delta}$ și astfel ca, oricare ar fi $f(z)$ din mulțimea dată, să avem $|f(z)| < M_{\overline{\Delta}}$, pentru orice $z \in \overline{\Delta}$.

Familiile mărginite în interiorul unui domeniu D dat au un rol important pentru că, după cum vom vedea, acest fapt ne permite să lărgim considerabil ipotezele celelalte care intervin în teoremele de tipul celei din secțiunea precedentă.

Să observăm că noțiunea de familie mărginită *în interiorul lui* D este mai largă decît acea de familie mărginită *în* D. De exemplu, funcțiile $\frac{\cos\theta}{1-z}$,

unde θ este un număr real arbitrar, nu formează o familie mărginită în $|z| < 1$, dar ele constituie o familie mărginită în interiorul acestui domeniu.

5. *Dacă familia* $\{f(z)\}$ *este mărginită în interiorul lui* D, *atunci și familia* $\{f'(z)\}$, *a derivatelor funcțiilor* $f(z)$, *este mărginită în interiorul lui* D.

Fie Δ_1 un domeniu jordanian, limitat de o curbă rectificabilă Γ, și astfel ca $\overline{\Delta_1} = \Delta_1 + \Gamma \subset D$, iar $\overline{\Delta} \subset \Delta_1$ (fig. 17).

Un astfel de Δ_1 se poate evident construi, pentru că $\overline{\Delta}$ este mărginit și cuprins în D.

Avem pentru orice $z \in \Delta_1$ și deci, pentru orice $z \in \overline{\Delta}$ și orice $f(z)$ din familia dată,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

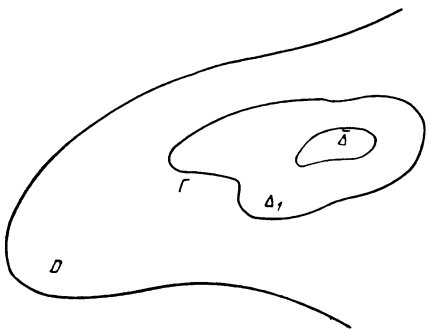


Fig. 17

Cum $\overline{\Delta} \subset \Delta_1$, distanța minimă δ dintre $\overline{\Delta}$ și curba Γ este > 0 și deci

$$|f'(z)| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_{\overline{\Delta_1}} \cdot L}{\delta^2},$$

unde $M_{\overline{\Delta_1}} > |f(z)|$, pentru orice $f(z)$ din familia dată și orice $z \in \overline{\Delta_1}$, iar L reprezintă lungimea lui Γ.

Cum toate aceste numere nu depind decît de $\overline{\Delta_1}$ și de $\overline{\Delta}$, iar $\overline{\Delta_1}$ depinde și el de $\overline{\Delta}$ (care este oarecare în D, în condițiile indicate), se vede că familia $\{f'(z)\}$ este mărginită în interiorul lui D.

6. O familie de funcții $\{f(z)\}$, olomorfe în D, se spune că este *egal continuă în* $\overline{\Delta} \subset D$, dacă, oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$ dat, există un $\eta > 0$ astfel încît, dacă z_1 și z_2 sînt în $\overline{\Delta}$, inegalitatea $|z_1 - z_2| < \eta$ atrage după sine inegalitatea

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon,$$

pentru *orice* $f(z)$ *din familia dată.*

L e m ă . *Dacă* $\{f(z)\}$ *este mărginită în interiorul lui* D, *ea este egal continuă în orice domeniu mărginit și închis* $\overline{\Delta} \subset D$, *care este convex*.*

* O mulțime este *convexă* dacă îi aparține în întregime orice segment de dreaptă care unește două puncte oarecare ale mulțimii.

După propoziția din paragraful precedent, avem, pentru orice $f(z)$ din familia dată, dacă $z \in \overline{\Delta}$,

$$|f'(z)| < \mu,$$

unde μ nu depinde decît de $\overline{\Delta}$.

Dacă z_1 și z_2 sînt două puncte oarecare din $\overline{\Delta}$, acesta fiind convex, avem, integrînd pe segmentul $\overline{z_1 z_2}$ (cum acesta este cuprins în $\overline{\Delta}$),

$$f(z_1) - f(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f'(\zeta)\, d\zeta$$

și deci,

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \mu\, |z_1 - z_2|.$$

Este deci suficient să luăm $\eta = \frac{\varepsilon}{\mu}$, pentru ca

$$|z_1 - z_2| < \eta \text{ să atragă } |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

7. Cu ajutorul lemei din paragraful precedent vom demonstra acum următoarea teoremă relativă la șirurile de funcții olomorfe în D care formează o familie mărginită în interiorul lui D.

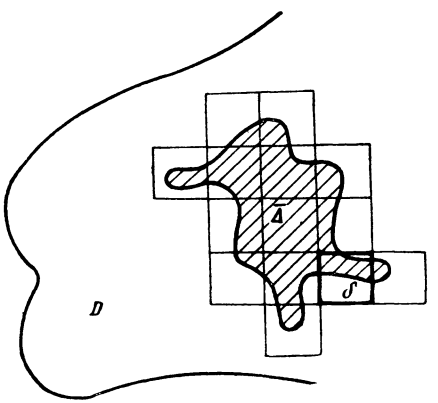


Fig. 18

T e o r e m ă. Fie $f_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, un șir de funcții olomorfe în D și constituind *o familie mărginită în interiorul lui D*.

Dacă acest șir este convergent într-o mulțime A de puncte din D, densă în D, atunci șirul este uniform convergent în interiorul lui D.*

Fie $\overline{\Delta}$ un domeniu închis mărginit $\subset D$ (fig. 18).

Acest $\overline{\Delta}$ poate fi închis într-un domeniu format din pătrate egale δ_k, cu laturile paralele cu axele planului (z) și așezat în întregime în D**. Fiecare din aceste pătrate δ_k (în număr finit pentru că $\overline{\Delta}$ este mărginit) este un do-

* O mulțime A este *densă în* D dacă în orice cerc cuprins în D există puncte ale mulțimii A.

** Ajunge pentru aceasta să «pavăm» planul cu pătrate egale, ducînd paralele echidistante la axele lui (z) și să reținem numai acele pătrate care cuprind cel puțin un punct din $\overline{\Delta}$.

meniu închis convex. Deci, după lema din § 6, $\varepsilon > 0$ fiind dat, există un η_k, pentru fiecare δ_k, astfel încît, dacă z_1 şi z_2 sînt în δ_k, avem, oricare ar fi n,

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon,$$

dacă

$$|z_1 - z_2| < \eta_k .$$

Cum numărul pătratelor δ_k este finit, putem alege pe cel mai mic dintre aceşti η_k, fie η, şi atunci, oricare ar fi z_1 şi z_2 în acelaşi pătrat δ_k, dacă

$$|z_1 - z_2| < \eta,$$

pentru orice n, avem

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Să subîmpărţim pătratele δ_k în altele δ'_k, astfel ca diagonala pătratelor δ_k să fie $< \eta$. Atunci, oricare ar fi z_1 şi z_2 *în acelaşi* δ'_k, avem inegalitatea (3) *pentru orice* n.

Cum mulţimea A este densă în D, în fiecare δ'_k există un punct al lui A, fie z_k, în care, prin ipoteză, şirul $f_n(z_k)$ este convergent.

Dar cum numărul pătratelor δ_k este finit, putem alege un număr N_ε, valabil pentru toţi k, astfel încît, dacă

$$n > N_\varepsilon \text{ şi } n' > N_\varepsilon ,$$

să avem

$$|f_n(z_k) - f_{n'}(z_k)| < \varepsilon.$$

Fie z un punct oarecare din $\overline{\Delta}$.

Cum z este într-un δ'_k, avem, după (3), pentru orice n şi n,

$$\begin{cases} |f_n(z) - f_n(z_k)| < \varepsilon' \\ |f_{n'}(z) - f_{n'}(z_k)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{5}$$

Deci, dacă n şi n' sînt superiori lui N_ε, avem simultan relaţiile (4) şi (5).

Dar,

$$|f_n(z) - f_{n'}(z)| \leqslant |f_n(z) - f_n(z_k)| + |f_n(z_k) - f_{n'}(z_k)| + |f_{n'}(z_k) - f_{n'}(z)|.$$

Deci, după (4) şi (5),

$$|f_n(z) - f_{n'}(z)| < 3\ \varepsilon. \tag{6}$$

Dar z este oarecare în $\overline{\Delta}$.

Deci, (6) arată că șirul $f_n(z)$ este uniform convergent în $\overline{\Delta}$.

Cum $\overline{\Delta}$ este ales arbitrar în D (în condițiile specificate), aceasta înseamnă că șirul este uniform convergent în interiorul lui D.

8. Principiul acumulării. *Dintr-un șir de funcții $f_n(z)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, olomorfe în D, care este o familie mărginită de funcții în interiorul lui D, se poate întotdeauna extrage un șir $f_{n_p}(p = 1, 2, 3, \ldots)$, care este convergent uniform în interiorul lui D**.

Să considerăm mulțimea R a punctelor $z = x + iy$ din D, în care x și y sînt raționale.

Mulțimea R este densă în D. Pe de altă parte, ea este numărabilă (cap. I, § 2). Punctele ei pot fi deci notate prin

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots.$$

Șirul

$$f_1(\alpha_1), \quad f_2(\alpha_1), \ldots, f_n(\alpha_1), \ldots \tag{7}$$

formează o mulțime de puncte mărginită. Ea are cel puțin un punct de acumulare în plan dacă este infinită. Dacă numerele complexe distincte care figurează în (7) sînt în număr finit, atunci o infinitate de termeni din (7) sînt identici între ei.

Din (7) se poate deci întotdeauna desprinde un subșir

$$f^1_{n_1}(\alpha_1), f^1_{n_2}(\alpha_1), \ldots, f^1_{n_p}(\alpha_1), \ldots,$$

care tinde către o limită bine determinată, finită.

Deci, din șirul $f_n(z)$ dat, putem extrage un subșir

$$f^1_{n_1}(z), f^1_{n_2}(z), \ldots, f^1_{n_p}(z), \ldots, \tag{8}$$

care este convergent pentru $z = \alpha_1$.

Șirul

$$f^1_{n_1}(\alpha_2), f^1_{n_2}(\alpha_2), \ldots, f^1_{n_p}(\alpha_2), \ldots$$

este exact în condițiile lui (7).

Din el se poate deci extrage un șir

$$f^2_{n_1}(\alpha_2), f^2_{n_2}(\alpha_2), \ldots, f^2_{n_p}(\alpha_2), \ldots,$$

care tinde către o limită bine determinată și finită.

Șirul

$$f^2_{n_1}(z), f^2_{n_2}(z), \ldots, f^2_{n_p}(z), \ldots$$

este convergent pentru $z = \alpha_2$ dar, fiind extras din (8), el este convergent și pentru $z = \alpha_1$.

---

* Această proprietate a șirurilor mărginite de funcții în interiorul lui D le apropie de șirurile de puncte în plan care sînt mărginite.

Continuînd astfel, se formează un şir infinit de şiruri infinite

$$\left.\begin{array}{l} f^1_{n_1}(z),\ f^1_{n_2}(z),\ \ldots, f^1_{n_p}(z),\ \ldots \\ f^2_{n_1}(z),\ f^2_{n_2}(z),\ \ldots, f^2_{n_p}(z),\ \ldots \\ f^q_{n_1}(z),\ f^q_{n_2}(z),\ \ldots f^q_{n_p}(z),\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{9}$$

astfel încît fiecare şir este extras din precedentul, şirul de rang q fiind convergent pentru z egal cu una oarecare din valorile

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_q\ .$$

Să considerăm atunci şirul diagonal a lui (9), adică şirul

$$f^1_{n_1}(z),\ f_{n_2}(z), \ldots, f^p_{n_p}(z), \ldots . \tag{10}$$

Acesta, fiind format, de la un anumit termen înainte, din termeni extraşi din şirul de rang q din (9) (q dat oarecare), este convergent pentru toate valorile z luate din R.

Deci, după teorema din paragraful precedent (R fiind densă în D), şirul (10) este convergent uniform în interiorul lui D.

9. Aplicaţie la demonstrarea unei teoreme a lui Vitali. În teorema lui Weierstrass, demonstrată în § 1, nu se presupune şirul dat mărginit în interiorul domeniului D.

Vom vedea acum că această ipoteză permite lărgirea condiţiilor de convergenţă în mod considerabil.

Dacă $f_n(z)$ formează o familie mărginită în D de funcţii olomorfe în D, convergenţa şirului de funcţii numai într-o infinitate numărabilă A de puncte din D, dar care are cel puţin un punct de acumulare în interiorul lui D, trage după sine convergenţa uniformă a şirului $f_n(z)$ în interiorul lui D.

Teorema aceasta, datorită lui G. V i t a l i, este o consecinţă a rezultatului din § 8.

Fie α_p ($p = 1, 2, 3, \ldots$) punctele lui A şi fie $z = \beta$ un punct $\neq \alpha_p$, în care şirul $f_n(z)$ nu ar fi convergent.

Atunci, din şirul $f_n(\beta)$ se poate extrage un şir

$$f_{n_1}(\beta),\ f_{n_2}(\beta), \ldots f_{n_p}(\beta), \ldots , \tag{11}$$

care converge către un număr finit B, şi un alt şir

$$f_{n'_1}(\beta),\ f_{n'_2}(\beta), \ldots, f_{n'_p}(\beta), \ldots , \tag{12}$$

care converge către un număr finit $B' \neq B$.

Dar din şirurile

$$f_{n_1}(z),\ f_{n_2}(z), \ldots, f_{n_p}(z), \ldots$$

$$f_{n'_1}(z),\ f_{n'_2}(z), \ldots, f_{n'_p}(z), \ldots$$

se poate (după principiul acumulării, din paragraful precedent) extrage, respectiv, cîte un șir S și S', fiecare uniform convergent în interiorul lui D.

După teorema lui Weierstrass, fiecare din acesta are ca limită cîte o funcție olomorfă în D, fie $F(z)$ și $F_1(z)$ respectiv. Dar, atît S cît și S', fiind extrase din $f_n(z)$, avem, după ipoteză,

$$F(\alpha_p) = F_1(\alpha_p) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ceea ce am spus despre (11) și (12) arată însă că avem

$$F(\beta) = B \text{ și } F_1(\beta) = B' \text{ cu } B \neq B'. \tag{13}$$

Cum mulțimea A a punctelor α_p are un punct de acumulare în D, acesta este un zero neizolat al funcției olomorfe

$$F(z) - F_1(z).$$

Deci, trebuie să avem $F(z) \equiv F_1(z)$ în D, ceea ce contrazice (13).

Așadar, șirul $f_n(z)$ converge în $z = \beta$ și deci în orice punct din D. După teorema din § 7, el este deci convergent uniform în interiorul lui D.

10. Familii normale de funcții olomorfe în D. Să observăm că în paragraful precedent nu am folosit direct faptul că familia $f_n(z)$ era mărginită în interiorul lui D, pentru a demonstra că $f_n(z)$, este convergent în orice punct din D, ci numai faptul că din șirul $f_n(z)$ sau din orice subșir al său, putem întotdeauna extrage un șir uniform convergent în interiorul lui D.

Se numesc *familii normale* de funcții (după P. M o n t e l) familiile de funcții olomorfe în D, care posedă proprietatea că din orice șir infinit extras din familie se poate extrage un șir infinit uniform convergent în interiorul lui D. P. M o n t e l a observat că există familii normale care nu sînt mărginite în interiorul lui D și chiar care nu sînt egal continue în nici un domeniu $\overline{\Delta} \subset D$.

Deci, dacă în enunțul teoremei lui Vitali se înlocuiește condiția ca șirul $f_n(z)$ să fie mărginit în interiorul lui D prin aceea ca el să formeze o familie normală, demonstrația de mai sus duce la faptul că $f_n(z)$ este convergent în orice punct din D.

Pentru a trage de aici concluzia că $f_n(z)$ este convergent uniform în interiorul lui D, ne-am servit de teorema din § 7, care presupune familia $f_n(z)$ mărginită în interiorul lui D.

Cu această presupunere, de fapt, nici nu era necesar ca șirul să fie convergent în *orice* punct din D, ci numai în punctele unei mulțimi dense în D.

Dacă familia, în loc să fie presupusă mărginită, este presupusă numai normală, dar șirul $f_n(z)$ este convergent în orice punct din D, se poate încă arăta că $f_n(z)$ este uniform convergent în interiorul lui D *.

Așadar, teorema lui Vitali rămîne valabilă pentru șiruri formînd o familie normală.

---

* A se vedea, de exemplu, G. J u l i a, *Fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*, Gauthier Villars, Paris, 1924.

11. Înaintea lui G. V i t a l i, J. S t i e l t j e s arătase că, dacă şirul $f_n(z)$ este mărginit în D, este suficient să presupunem convergenţa sa într-un domeniu $d \subset D$ oarecare, pentru a putea conchide că $f_n(z)$ este convergent uniform în interiorul lui D.

Este evident că acest rezultat decurge şi din teorema lui Vitali şi este mai restrictiv decît aceasta din urmă.

III. REPREZENTAREA CONFORMĂ A UNUI DOMENIU SIMPLU CONEX

12. Una dintre cele mai importante aplicaţii ale rezultatelor precedente şi, în particular, ale principiului acumulării este aceea care a permis, în 1913, lui C. C a r a t h é o d o r y să dea prima demonstraţie bazată exclusiv pe consideraţii de teoria funcţiilor de variabilă complexă a celebrei teoreme a lui Riemann asupra reprezentării conforme. Cum reprezentarea conformă ne va servi mai tîrziu pentru introducerea, în mod natural, a unor clase importante de funcţii analitice, vom da acum şi această demonstraţie a teoremei lui Riemann.

13. Teorema fundamentală a reprezentării conforme. (T e o r e m a l u i R i e m a n n). Am văzut (cap. III, § 3) că orice funcţie olomorfă şi univalentă într-un domeniu reprezintă acest domeniu conform pe un alt domeniu, adică transformarea definită prin funcţie păstrează valoarea şi sensul unghiurilor. Teorema următoare, enunţată de B. R i e m a n n, constituie baza teoriei reprezentării conforme:

Orice domeniu simplu conex, a cărui frontieră conţine mai mult decît un singur punct, poate fi reprezentat conform pe interiorul cercului unitate; adică D fiind în planul (z), există o funcţie $u = f(z)$ olomorfă şi univalentă în D, astfel încît imaginea lui D în planul (u), prin această funcţie, este domeniul $|u| < 1$.

14. Să observăm mai întîi că ambele condiţii impuse domeniului D sînt necesare.

Dacă, într-adevăr, D nu ar fi simplu conex, cum $u = f(z)$ este o transformare topologică (cap. I, § 16), iar pe de altă parte, conexiunea simplă este un invariant topologic, imaginea lui D nu ar putea fi un cerc, deoarece acesta este un domeniu simplu conex.

În ceea ce priveşte a doua condiţie, dacă D ar fi sfera lui Riemann mai puţin un singur punct, acest punct a ar putea fi transportat la ∞ prin inversiunea obişnuită $z' = \frac{1}{z - a}$, iar funcţia, care ar reprezenta (după această schimbare de variabilă) pe D în $|u| < 1$, ar fi o funcţie întreagă mărginită, adică, după teorema lui Liouville, o constantă, ceea ce ar fi în contrazicere cu condiţia ca D să fie transformat într-un cerc.

15. Domeniul D fiind dat cu cele două condiţii din enunţul teoremei, să mai observăm că putem presupune pe D mărginit.

Într-adevăr, dacă D nu este mărginit, putem distinge două cazuri:

1° Domeniul D nu cuprinde nici un punct al unui anumit cerc γ cu centrul a și cu raza r;

2° Complementara lui D față de planul (z) nu cuprinde nici un cerc.

În primul caz, schimbarea de variabilă b i u n i v o c ă

$$z' = \frac{1}{z - a} \tag{14}$$

transformă pe D din planul (z) într-un domeniu D' cuprins în $|z'| < \frac{1}{r}$, deci mărginit, din planul (z'), și reduce deci problema reprezentării lui D la aceea a reprezentării lui D'.

În al doilea caz, cum frontiera lui D cuprinde cel puțin două puncte a și b distincte, să considerăm schimbarea de variabilă

$$z' = \sqrt{\frac{z - a}{z - b}}. \tag{15}$$

Această schimbare de variabilă definește o transformare a lui D în D', care este și ea biunivocă. Într-adevăr, radicalul nu poate lua decît o singură valoare, adică z' este funcție uniformă de z, cînd z rămîne în D, în baza teoremei monodromiei (cap. IV, § 6), deoarece D este simplu conex și, în D, radicalul nu are nici o singularitate. Pe de altă parte, se vede îndată că z este funcție uniformă de z'.

Dar domeniul D', obținut din D prin (15), este neapărat în cazul 1°, deoarece dacă un punct $z' = z'_1$ face parte din D', punctul $z' = -z'_1$ este cu siguranță în complementara lui D'.

Deci, printr-o transformare (14) sau printr-o transformare (15) combinată cu o transformare (14) (ambele transformări conforme), domeniul D este transformat într-un domeniu *mărginit*.

Vom putea presupune deci pe D mărginit, pentru demonstrarea teoremei (din § 13) și, în plus, că D cuprinde pe $z = 0$, ceea ce se obține printr-o translație.[1]

16. Să considerăm acum familia $\{\varphi\}$ de funcții $\varphi(z)$, definite în D și caracterizate prin următoarele proprietăți:

1° $\varphi(z)$ este olomorfă în D;
2° $\varphi(z)$ este univalentă în D;
3° $|\varphi(z)| < 1$ în D;
4° $\varphi(0) = 0$ *.

Lema lui Schwarz (cap. II, § 29) se poate aplica funcțiilor $\varphi(z)$, considerate în cercul $|z| < \rho$, unde ρ este suficient de mic pentru ca acest cerc să fie cuprins în D. Ea dă, pentru orice $\varphi(z)$,

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{|z|}{\rho}, \tag{16}$$

* Este clar că există asemenea funcții. De exemplu $\frac{z}{R}$, unde R este raza unui cerc cu centrul în O, care cuprinde pe D.

şi cum

$$|\varphi'(0)| = \lim_{|z|\to 0}\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right|,$$

inegalitatea (16) duce la

$$|\varphi'(0)| \leqslant \frac{1}{\rho}.$$

Deci, familia derivatelor $\varphi'(z)$ ale funcţiilor $\varphi(z)$ este mărginită în $z=0$*. Fie μ marginea superioară a lui $|\varphi'(0)|$ cînd $\varphi(z)$ parcurge familia $\{\varphi\}$. Există atunci un şir de funcţii

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z),\ \ldots \tag{17}$$

din $\{\varphi\}$, astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n'(0)| = \mu.$$

Din şirul (17), care este mărginit în D, se poate extrage un subşir

$$\varphi_{n_1}(z),\ \varphi_{n_2}(z),\ \ldots,\varphi_{n_p}(z),\ \ldots,$$

uniform convergent în interiorul lui D după principiul acumulării (§ 8); acest subşir are o limită $f(z)$, funcţie olomorfă în D, după teorema lui Weierstrass. Totodată, după a doua parte a teoremei lui Weierstrass, avem $f'(0)=\mu$.

Vom arăta că $f(z)$ este şi ea o funcţie $\varphi(z)$, adică satisface cele patru condiţii de mai sus.

Prima condiţie rezultă chiar din teorema amintită a lui Weierstrass. Condiţia 4° este evidentă.

Pentru a demonstra că $f(z)$ satisface condiţia 2°, adică este univalentă în D, să presupunem că nu ar fi aşa, şi fie atunci $z=z_1$ şi $z=z_2$ două puncte distincte din D în care am avea $f(z_1) = f(z_2) = b$ (fig. 19). Fie $\bar{\Delta} = \Delta + \Gamma$ un domeniu jordanian cuprins în D, limitat de curba rectificabilă Γ şi cuprinzînd în interiorul său pe z_1 şi z_2. Avem :

$$f(z) - b = \varphi_{n_k}(z) - b + [f(z) - \varphi_{n_k}(z)].$$

Putem presupune că domeniul $\bar{\Delta}$ a fost ales astfel ca, pe Γ, să avem

$$|f(z) - b| > \delta > 0,$$

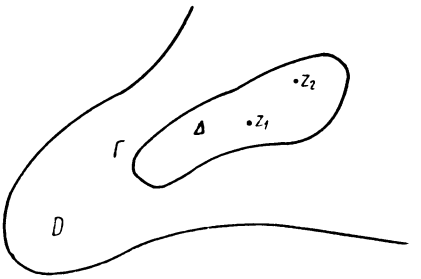


Fig. 19

* Egal mărginirea derivatelor funcţiilor din familia $\{\varphi\}$ în punctul $z = 0$ rezultă de altfel şi din condiţia 3° şi afirmaţia 5 (cap. V, II).

deoarece punctele din D în care $f(z) - b = 0$ sînt izolate. Avem deci, pe Γ, cu un $\varepsilon > 0$ arbitrar dat,

$$\left| \frac{f(z) - \varphi_{n_k}(z)}{f(z) - b} \right| < \frac{\varepsilon}{\delta},$$

dacă luăm pe k suficient de mare; aceasta din cauza convergenței uniforme pe Γ a șirului $\varphi_{n_k}(z)$ (pentru $k \to \infty$) către $f(z)$. Cum δ este fix, dacă luăm $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, se vede îndată din teorema lui Rouché, rezultată ca aplicație imediată a teoremei variației argumentului (cap. II, § 22), că $f(z) - b$ are același număr de zerouri în Δ ca și $\varphi_{n_k}(z) - b$. Or, acesta este univalent în D, deci și în Δ. Deci $f(z)$ este și ea univalentă în Δ și nu putem avea $z_1 \neq z_2$.

În ceea ce privește condiția 3°, cum prin definiție,

$$f(z) = \lim_{k \to \infty} \varphi_{n_k}(z),$$

este evident că, în D, nu putem avea decît

$$|f(z)| \leqslant 1.$$

Nu putem avea însă în nici un punct din D, egalitatea, deoarece atunci $f(z)$ ar fi o constantă de modul 1, după teorema maximului modulului (cap. II, § 26). Or, aceasta ar contrazice condiția 4°, pe care am constatat că o satisface $f(z)$. Deci,

$$|f(z)| < 1$$

și condiția 3° este satisfăcută.

Așadar, $f(z)$ este o funcție $\varphi(z)$.

17. Vom arăta acum că transformarea

$$u = f(z), \tag{18}$$

în care $f(z)$ este funcția definită mai sus, realizează reprezentarea conformă a lui D pe $|u| < 1$.

Imaginea $f(D)$ a lui D prin (18) este cuprinsă în cercul $|u| < 1$. Cum $f(z)$ este univalentă în D, rămîne de arătat că această imagine acoperă tot domeniul $|u| < 1$.

18. În acest scop, vom construi o funcție ajutătoare $u = \psi(v)$, care să reprezinte domeniul $|v| < 1$ din (v) pe $|u| < 1$ din (u), astfel încît imaginea lui $|v| < 1$ să acopere de două ori pe $|u| < 1$, în felul celei obținute prin $u = v^2$, cu deosebirea însă că rolul pe care-l are originea $u = 0$ în această din urmă funcție să-l aibă, în $u = \psi(v)$, un punct α oarecare dat din $|u| < 1$.

Funcţia $u = \psi(v)$ se obţine cu uşurinţă prin suprapuneri de funcţii simple, care transformă cercul unitate în el însuşi. Acestea sînt

$$\text{(I)} \qquad \frac{u - \alpha}{1 - u\bar{\alpha}} = u'$$

$$\text{(II)} \qquad u' = v'^2$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{v' - \sqrt{-\alpha}}{1 - v'\sqrt{-\bar{\alpha}}} = v$$

(I) transformă pe $|u| < 1$ în $|u'| < 1$ (cap. III, § 13), mutînd pe $u = \alpha$ în $u' = 0$ şi pe $u = 0$ în $u' = -\alpha$.
(II) transformă pe $|u'| < 1$ în $|v'| < 1$, mutînd pe $u' = -\alpha$ în $v' = \sqrt{-\alpha}$ şi păstrînd originea.
(III) transformă pe $|v'| < 1$ în $|v| < 1$, mutînd pe $v' = \sqrt{-\alpha}$ în $v = 0$ şi pe $v' = 0$ în $v = -\sqrt{-\alpha}$.

Deci transformarea $u = \psi(v)$, rezultată din suprapunerea celor trei transformări de mai sus, este uniformă; ea transformă pe $|v| < 1$ în $|u| < 1$ şi păstrează originea. Imaginea lui $|v| < 1$ acoperă de *două ori* pe $|u| < 1$ în toate punctele sale, afară de $u = \alpha$, care este imaginea numai a lui $v = -\sqrt{-\alpha}$.

Lema lui Schwarz se aplică lui $u = \psi(v)$ şi dă

$$\left|\frac{du}{dv}\right|_{v=0} < 1, \tag{19}$$

deoarece, dacă cantitatea din stînga ar fi egală cu 1, ar trebui ca $u = \psi(v)$ să fie o simplă rotaţie în jurul originii, adică o transformare liniară, ceea ce, am văzut, nu poate fi, ea nefiind biunivocă.

Funcţia inversă $v = \psi^{-1}(u)$ a celei de sus este multiformă, are două valori în fiecare punct din $|u| < 1$ şi un singur punct critic în $u = \alpha$, celelalte fiind puncte ordinare.

Din (19) se deduce

$$\left|\frac{dv}{du}\right|_{u=0} > 1. \tag{20}$$

19. Să presupunem acum că $f(D)$ nu ar acoperi tot $|u| < 1$. Ar exista atunci cel puţin un punct $\alpha \neq 0$ interior lui $|u| < 1$, care ar fi punct frontieră pentru $f(D)$. Cum $f(D)$, ca imagine biunivocă (deci topologică) a lui D este şi el simplu conex, şi cum α nu face parte din $f(D)$, fiecare ramură a funcţiei

$$v = \psi^{-1}(u)$$

este uniformă în $f(D)$, în baza teoremei monodromiei.

Deci

$$v = \psi^{-1}[f(z)] \tag{21}$$

este uniformă şi olomorfă în D. Ea este şi univalentă.

Funcția aceasta face deci parte din familia $\{\varphi\}$, condițiile 3° și 4° fiind verificate și ele. Pe de altă parte (20) și (21) dau

$$\left|\frac{dv}{dz}\right|_{z=0} = \left|\frac{dv}{du}\right|_{u=0} \cdot |f'(0)| > \mu,$$

deoarece $|f'(0)| = \mu$.

Deci, după definiția lui μ ca margine superioară a lui $|\varphi'(0)|$ în $\{\varphi\}$, funcția definită prin (21) nu poate face parte din familia $\{\varphi\}$. Din această contradicție rezultă că nu poate exista α punct frontieră al domeniului $f(D)$ și totodată punct interior al lui $|u| < 1$.

Deci $f(D)$ se confundă cu $|u| < 1$ și $u = f(z)$ realizează reprezentarea conformă a lui D pe cerc.

20. Două domenii oarecare D și D' din planurile (z) și (z') se pot reprezenta conform unul pe altul dacă ambele sînt simplu conexe și dacă fiecare are mai mult decît un singur punct frontieră.

Într-adevăr, atunci D ca și D' se reprezintă conform pe $|u| < 1$ prin

$$u = f(z) \text{ și } u = f_1(z').$$

Cum f și f_1 sînt univalente, avem îndată reprezentarea conformă

$$z' = f_1^{-1}[f(z)] \tag{22}$$

a lui D pe D'.

Reciproc, orice reprezentare conformă a lui D pe D' se poate scrie sub forma (22), în care una din funcțiile f și f_1 poate fi dată arbitrar printre funcțiile care reprezintă conform domeniul respectiv pe $|u| < 1$.

Întocmai ca și în reprezentarea conformă a unui cerc pe alt cerc (cap. III, § 13), se poate dispune de trei parametri reali în reprezentarea conformă a lui D pe D'.

21. Reprezentarea conformă a atras atenția asupra importanței funcțiilor univalente într-un domeniu dat. Se cunosc numeroase proprietăți ale acestor funcții, proprietăți care precizează în special, deformarea efectuată prin reprezentarea conformă. Teoria specială a funcțiilor univalente constituie un important capitol al teoriei funcțiilor de variabilă complexă*.

---

* În acest domeniu se poate consulta, de exemplu, G. M. Goluzin, *Gheometricheskaia teoria funcții complexnovo peremennovo*, Gostehizdat, Moscova-Leningrad, 1952.

CAPITOLUL VI

FUNCȚII ÎNTREGI ȘI FUNCȚII MEROMORFE

I. GENERALITĂȚI ASUPRA REPREZENTĂRII FUNCȚIILOR ÎNTREGI ȘI A FUNCȚIILOR MEROMORFE

1. Funcții uniforme. Ne vom ocupa acum, în cîteva capitole, de anumite clase de funcții *uniforme*, adică de funcții analitice care, privite în tot domeniul lor de existență, nu au, în fiecare punct al planului (z), decît o singură valoare cel mult. Drumurile pe care se efectuează prelungirea analitică a unui element al unei atare funcții duc deci toate într-un punct dat al planului ori la un punct ordinar — și, în cazul acesta, la unul și același element de funcție — ori la un punct singular. Mulțimea punctelor ordinare ale funcției formează deci un domeniu W al planului (z).* Frontiera F a acestui domeniu cuprinde mulțimea S a punctelor singulare. Mulțimea S este formată de acele puncte ale frontierei care sînt accesibile din domeniul W al punctelor ordinare printr-un drum continuu.

Pentru clasificarea funcțiilor uniforme, este natural să începem prin a considera pe cele mai simple dintre ele.

Să presupunem deci că mulțimea S este formată *numai din poli* ai lui $f(z)$, adică nu avem decît cele mai simple singularități posibile. Cum polii sînt singularități izolate, iar pe de altă parte, mulțimea S este densă** pe F, se vede că, în acest caz, S este identic cu F și că această mulțime este *finită*. Deci funcțiile care nu au alte singularități decît poli au neapărat un număr finit de puncte singulare. Vom vedea îndată că aceste funcții se confundă cu funcțiile raționale.

2. T e o r e m ă . *Condiția necesară și suficientă pentru ca funcția analitică uniformă $f(z)$ să nu aibă alte singularități decît poli este ca să fie rațională.*

---

* Reamintim că «planul (z)» este topologic echivalent cu sfera lui Riemann (*Introducere*, § 5) și cuprinde deci și punctul $z = \infty$.

** Într-adevăr, F neputînd avea puncte interioare, iar W fiind format numai din puncte interioare, în orice vecinătate a unui punct de pe F se găsesc puncte ale lui S, adică puncte accesibile din W.

Condiția este evident suficientă.

Se verifică îndată că funcțiile raționale nu au alte singularități decît poli.

Rămîne deci de arătat că orice funcție uniformă care nu are decît poli ca puncte singulare este rațională.

Am văzut că mulțimea S a acestor poli este finită.

Fie b_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, p)$ polii lui $f(z)$.

Putem presupune întotdeauna (efectuînd la nevoie o schimbare de variabilă), că toți acești poli sînt la distanță finită, astfel încît $z = \infty$ este ordinar.

În jurul lui b_k, $f(z)$ se poate dezvolta în serie

$$f(z) = \pi_k\left(\frac{1}{z - b_k}\right) + c_0 + c_1 (z - b_k) + c_2 (z - b_k)^2 + \ldots,$$

unde $\pi_k(v)$ este un polinom în v.

Funcția

$$f(z) - \sum_{k=1}^{p} \pi_k\left(\frac{1}{z - b_k}\right) = g(z) \tag{1}$$

nu mai are deci poli în b_k. Pe de altă parte, $\pi_k\left(\frac{1}{z - b_k}\right)$, neavînd altă singularitate decît $z = b_k$, scăderea de mai sus nu introduce nici o singularitate nouă. Deci $g(z)$ este o funcție uniformă, care nu are nici o singularitate. Dar o asemenea funcție, trebuind să fie întreagă și mărginită în tot (z), este, după teorema lui Liouville (cap. III, § 46), o constantă. Din (1) rezultă atunci că $f(z)$ este funcție rațională.

3. Să considerăm acum funcțiile $f(z)$ uniforme, care admit un singur punct singular esențial. Prin transformarea obișnuită, acest punct poate fi dus în $z = \infty$, astfel încît $f(z)$ devine o funcție care, la distanță finită, nu admite alte singularități decît poli*, iar la ∞ are o singularitate esențială.

Asemenea funcții se numesc *funcții meromorfe***.

Dacă nu există poli, ci numai singularitatea din $z = \infty$, funcția este *întreagă*.

Funcțiile întregi au, față de funcțiile meromorfe, poziția polinoamelor față de funcțiile raționale. Această observație ne conduce să căutăm analogii între clasa — foarte vastă — a funcțiilor meromorfe oarecare (transcendente) cu a funcțiilor raționale pe de o parte, și a funcțiilor întregi (transcendente) cu a polinoamelor pe de altă parte. Teoremele fundamentale care urmează sînt o primă expresie a unei asemenea analogii.

4. Funcții întregi. Produse canonice. O proprietate esențială a polinoamelor constă în posibilitatea descompunerii lor în factori primi binomiali,

---

* În general, acești poli sînt în număr infinit; polii fiind însă izolați, ei nu se pot acumula decît în $z = \infty$. Ei formează o mulțime numărabilă (cap. I, § 7).

** Am numit «meromorfe în D» (cap. II, § 15) funcțiile care în D sînt uniforme și nu au alte singularități decît poli. Se obișnuiește să se numească pur și simplu *meromorfă* o astfel de funcție dacă D este chiar planul (z) finit [adică (z) din care am exclus punctul ∞].

liniari în z, corespunzători fiecare cîte unui zero (rădăcină) al polinomului.

Funcțiile întregi $G(z)$ au, în general, o infinitate de zerouri (de exemplu, $\sin z$, care se anulează pentru $z = m\pi$ cu m întreg arbitrar).

Descompunerea în factori primi a funcțiilor întregi va trebui deci să facă să intervină un produs infinit.

K. Weierstrass a arătat cum se poate forma întotdeauna, printr-un produs infinit uniform convergent de «factori primari» de un anumit fel, o funcție întreagă tip (produs canonic) cu zerouri date dinainte.

Să observăm că zerourile date (în general în număr infinit) trebuie totuși să satisfacă o condiție, fără de care nu poate exista funcția întreagă corespunzătoare. Anume, zerourile unei funcții întregi fiind izolate, ele nu pot avea la distanță finită nici un punct de acumulare. Aceste zerouri formează deci o mulțime numărabilă, care nu poate avea alt punct de acumulare decît ∞.

Cu această singură condiție, pe care se presupune că o satisfac punctele

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{2}$$

date în planul (z), vom arăta, după K. Weierstrass, că *există o funcție întreagă* $g(z)$ [*produsul canonic al lui Weierstrass relativ la* (2)], care se anulează în punctele a_n date și numai în aceste puncte*.

Punctele a_n date se pot presupune așezate în șirul (2) în ordinea nedescrescătoare a valorilor absolute adică astfel încît, oricare ar fi n, să avem

$$|a_{n+1}| \geqslant |a_n| .$$

Să mai presupunem că toți $a_n \neq 0$. Dacă vrem să formăm produsul canonic pentru un șir (2) în care ar figura și zero, vom considera produsul relativ la ceilalți a_n și îl vom înmulți cu z^m, m fiind ordinul prescris al zeroului $z = 0$.

5. Factorii primari ai lui Weierstrass, al căror produs infinit va duce la funcția $g(z)$ sînt de forma

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_n(z)},$$

unde $P_n(z)$ este un polinom convenabil ales, depinzînd numai de n și de a_n.

Demonstrația teoremei lui Weierstrass, care stabilește existența lui $g(z)$, revine deci la a arăta că acest polinom $P_n(z)$ poate fi întotdeauna ales astfel încît produsul infinit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_n(z)} = \lim_{\nu \to \infty} \prod_{n=1}^{\nu} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_n(z)} \tag{3}$$

să fie uniform convergent în orice domeniu mărginit din (z).

În baza teoremei lui Weierstrass asupra șirurilor uniform convergente de funcții olomorfe, demonstrată în capitolul precedent, produsul infinit din (3) va reprezenta atunci o funcție $g(z)$ întreagă.

---

* Din punctele a_n mai multe (în număr finit) pot fi confundate: acestea ar fi zerouri multiple (de ordinul corespunzător) ale funcției întregi.

Factorii primari din (3) se pot scrie

$$e^{\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z)}.$$

Să considerăm un domeniu închis mărginit $\overline{\Delta}$ din (z) și fie C un cerc cu centrul în origine și cuprinzînd pe $\overline{\Delta}$.

Din produsul infinit (3) nu vom considera decît factorii primari al căror indice n este destul de mare, $n \geqslant k$, pentru ca a_n să fie exterior cercului C.

Este evident că pentru a stabili convergența uniformă în $\overline{\Delta}$ a lui (3), este suficient să demonstrăm convergența uniformă în $\overline{\Delta}$ a produsului infinit format numai cu acești factori primari în care $n \geqslant k$.

În C, deci în $\overline{\Delta}$, avem pentru acești factori

$$e^{\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z)} = e^{-\left[\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\cdots\right]+P_n(z)}$$

Să luăm

$$P_n(z) = \frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\cdots+\frac{z^{p_n-1}}{(p_n-1)\,a_n^{p_n-1}},$$

unde p_n este un număr natural depinzînd de n.

Vom avea atunci, în $\overline{\Delta}$

$$e^{\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z)} = e^{-\left[\frac{z^{p_n}}{p_n a_n^{p_n}}+\frac{z^{p_n+1}}{(p_n+1)\,a_n^{p_n+1}}+\cdots\right]}$$

și convergența uniformă, în $\overline{\Delta}$, a șirului din membrul al doilea al lui (3) revine la a arăta că seria dublă

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left[\frac{z^{p_n}}{p_n a_n^{p_n}}+\frac{z^{p_n+1}}{(p_n+1)\,a_n^{p_n+1}}+\cdots\right] \tag{4}$$

este uniform convergentă în $\overline{\Delta}$.

Or, în $\overline{\Delta}$, fiecare termen de sub semnul Σ din această serie este, în modul, inferior lui

$$\frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n}}{1-\left|\frac{z}{a_n}\right|} < \frac{q^{p_n}}{1-q},$$

dacă însemnăm prin q raportul $\frac{R}{|a_k|}$, unde R este raza cercului C.

Cum $q<1$, prin modul cum a fost ales k se vede că seria dublă (4) este absolut și uniform convergentă în $\overline{\Delta}$, dacă luăm p_n astfel ca $\sum_{n=k}^{\infty} q^{p_n}$ să fie convergentă.

Să luăm $p_n = n$, care satisface evident această condiție.

Deci (3) este uniform convergentă în $\overline{\Delta}$, dacă luăm

$$P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)\,a_n^{n-1}}.$$

Funcția

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)\,a_n^{n-1}}} \tag{5}$$

este deci întreagă. Ea se anulează evident pentru $z = a_n$, oricare ar fi n. Ea nu se anulează pentru nici o altă valoare α a lui z diferită de a_n. Aceasta se vede îndată, descompunînd produsul infinit din (5) în

$$\prod_{n=1}^{n=h}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)\,a_n^{n-1}}} \cdot \prod_{n=h+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)\,a_n^{n-1}}}, \tag{6}$$

unde h este destul de mare pentru ca $|a_n| > |\alpha|$, dacă $n > h$.

Din cele două produse din (6), primul nu se anulează pentru $z = \alpha$, iar cel din urmă nu se anulează de loc în cercul $|z| < |a_{h+1}|$, deci nu se anulează nici el pentru $z = \alpha$.

Funcția $g(z)$, funcție întreagă tip, atașată șirului (2), se numește *produs canonic al lui Weierstrass*.

6. Din rezultatul paragrafului precedent se pot trage cîteva concluzii importante, care ilustrează ideea analogiei dintre polinoame și funcțiile întregi.

Fie $G(z)$ o funcție întreagă dată.

Zerourile ei conduc la un produs canonic determinat $g(z)$.

Funcția

$$\frac{G(z)}{g(z)} = G_1(z)$$

este și ea o funcție întreagă, care nu mai are însă nici un zero. Dar $\log G_1(z$ este atunci tot o funcție întreagă* fie ea $H(z)$. Deci orice funcție întreagă care nu se anulează este de forma $e^{H(z)}$, $H(z)$, fiind altă funcție întreagă, iar *o funcție întreagă oarecare dată* $G(z)$ se poate întotdeauna scrie sub forma

$$G(z) = e^{H(z)} z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)\,a_n^{n-1}}}. \tag{7}$$

unde m este ordinul zeroului din origine, iar a_n sînt celelalte zerouri ale lui $G(z)$.

---

* Aceasta este o consecință a teoremei monodromiei. Într-adevăr, $G_1(z)$ nu are nici o singularitate în planul (z) finit, iar, pe de altă parte, acesta este un domeniu simplu conex.

Expresia (7) este analogă cu descompunerea în factori primi binomiali a unui polinom*.

O b s e r v a ț i e. Expresiei (7) i s-ar putea obiecta că ea însăși cuprinde o funcție întreagă nedeterminată $H(z)$. Vom vedea însă mai tîrziu că, în cazuri importante, $H(z)$ este o funcție întreagă mult mai simplă decît $G(z)$.

7. Fie acum $F(z)$ o funcție meromorfă oarecare dată.

Fie $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ polii ei, scriși fiecare de atîtea ori cît cere ordinul său de multiplicitate.

Să formăm funcția $g_1(z)$, produs canonic al lui Weierstrass pentru zerourile $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Atunci, funcția meromorfă

$$F(z) \cdot g_1(z) = G_1(z)$$

nu mai are poli; ea este deci o funcție întreagă. Avem deci

$$F(z) = \frac{G_1(z)}{g_1(z)},$$

adică *orice funcție meromorfă este cîtul a două funcții întregi* (întocmai după cum orice funcție rațională este cîtul a două polinoame).

8. Cazul cînd mulțimea zerourilor admite un exponent de convergență finit. Există un caz important cînd polinomul $P_n(z)$, în formarea produsului canonic al lui Weierstrass, poate fi înlocuit printr-un polinom, tot variabil cu a_n, dar *de grad fix, independent de n*. Este cazul cînd șirul (2) al zerourilor admite un exponent de convergență finit.

Iată ce se înțelege prin aceasta:

Să considerăm seria cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}}, \tag{8}$$

unde λ este un număr întreg.

Dacă pentru un $\lambda = \lambda_1$, seria (8) este convergentă, se spune că șirul $\{a_n\}$ admite un *exponent de convergență finit*. Atunci (8) este convergentă, *a fortiori*, pentru $\lambda > \lambda_1$. Fie $p + 1$ cel mai mic număr întreg pentru care (8) este convergentă. Numărul p măsoară, oarecum, densitatea punctelor a_n în plan: cu cît a_n tinde mai repede către ∞ cu n, cu atît p este mai mic.

Dacă există un exponent de convergență finit, putem lua, pentru formarea produsului canonic,

$$P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{pa_n^p},$$

adică $P_n(z)$, de grad fix, p, independent de n.

* În cazul polinomului, factorul $e^{H(z)}$ este înlocuit printr-o constantă, pentrucă singurele polinoame care nu au zerouri sînt constantele.

Pentru a demonstra aceasta, să reluăm expresia (4) din § 5. În $\overline{\Delta}$, fiecare serie de sub semnul Σ este, în modul, inferioară lui

$$\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n}\left[1+\left|\frac{z}{a_n}\right|+\left|\frac{z}{a_n}\right|^2+\ldots\right]=\frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n}}{1-\left|\frac{z}{a_n}\right|},$$

iar suma seriei duble este, în modul, inferioară lui

$$\frac{1}{1-q}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n}.$$

Dacă luăm $p_n = p+1$, cum z rămîne în $\overline{\Delta}$ și deci, în modul, inferior unui M fix, această din urmă expresie este inferioară lui

$$\frac{M^{p+1}}{1-q}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{p+1}},$$

care, după definiția lui p, este un număr finit.

Deci, în cazul existenței unui exponent de convergență finit pentru (2), putem lua ca produs canonic corespunzător

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\ldots+\frac{z^p}{pa_n^p}},$$

p fiind *cel mai mare întreg astfel încît pentru* $\lambda = p$ *seria* (8) *este divergentă.*

9. Să luăm, de exemplu, funcția întreagă sin z.

Produsul ei canonic se poate forma cu un polinom $P_n(z)$, de grad fix, deoarece zerourile lui sin z fiind $m\pi$ (cu m întreg oarecare), avem aici $p = 1$. Așadar,

$$\sin z = e^{H(z)}\cdot z\cdot\prod_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}, \tag{9}$$

în care accentul ′ pe lîngă semnul Π arată că produsul trebuie extins la toate numerele întregi *afară de* $n = 0$*.

În (9) rămîne de determinat funcția $H(z)$. Vom vedea mai departe că ea este aici identic nulă.

Să observăm că efectuînd produsul doi cîte doi al factorilor primari corespunzînd la valori egale și de semn contrar ale lui n, (9) se mai scrie

$$\sin z = e^{H(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2\right].$$

---

* Pentru definirea produsului infinit de la $-\infty$ la $+\infty$ se va lua produsul pentru $n = 1, 2, 3,\ldots$ și se va înmulți cu produsul pentru $n = -1, -2, -3,\ldots$

10. Funcții meromorfe. Reprezentarea prin serii de funcții raționale. Se știe că funcțiile raționale se pot reprezenta ca sume (finite) de funcții raționale «simple», adică funcții raționale având un singur pol.

Vom vedea acum că funcțiile meromorfe pot fi reprezentate în mod analog prin serii de funcții raționale simple, serii care converg uniform în orice domeniu mărginit și închis, care nu conține poli ai funcției.

În acest scop, vom proceda la fel cum am procedat mai sus pentru funcțiile întregi, și anume, vom forma, după G. M i t t a g- G. L e f f l e r *o funcție meromorfă de tip* $f(z)$ [funcția lui Mittag-Leffler relativă la polii dați ai lui $F(z)$], *funcție care posedă polii lui* $F(z)$ *și numai acești poli, cu aceleași părți principale în dezvoltarea Laurent.*

Fie deci

$$b_1, \quad b_2, \ \ldots, \ b_n, \ldots \tag{10}$$

puncte date, satisfăcînd aceleași condiții ca zerourile (2) de mai sus și așezate în ordinea nedescrescătoare a valorilor absolute.

Fie, de asemenea,

$$\pi_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) \tag{11}$$

polinoame date de $\dfrac{1}{z - b_n}$, atașate fiecărui b_n.

Teorema lui Mittag-Leffler stabilește existența funcției meromorfe $f(z)$ relative la (10) și (11), dînd un procedeu de construcție a acestei funcții.

Fie C_n cercul plin (discul) $|z| \leqslant q\,|b_n|$, atașat fiecărui b_n din (10), unde q este un număr fix, real, cuprins între 0 și 1.

Fie $\overline{\Delta}$ un domeniu închis și mărginit din (z) și fie k cel mai mic n astfel ca C_n să cuprindă pe $\overline{\Delta}$.

Pentru $z \in \overline{\Delta}$ și $n \geqslant k$, avem

$$\pi_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

seria fiind uniform convergentă în C_n.

Deci putem lua m destul de mare pentru ca, în C_n, să avem

$$\left|\pi_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) - (c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m)\right| < \varepsilon_n,$$

$\varepsilon_n > 0$ fiind dat arbitrar.

Să notăm cu $P_n(z)$ polinomul $-(c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m)$, care depinde evident de n, și să alegem ε_n astfel ca $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ să fie convergentă.

Seria

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left[\pi_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) + P_n(z)\right]$$

este atunci uniform convergentă în C_n, deci în $\overline{\Delta}$, și reprezintă o funcție olomorfă în acest domeniu.

Așadar, oricare ar fi $\overline{\Delta}$ astfel ca punctele (10) să fie toate în afară de $\overline{\Delta}$, seria

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pi_n \left(\frac{1}{z - b_n} \right) + P_n(z) \right] \tag{12}$$

este uniform convergentă în $\overline{\Delta}$. Suma ei $f(z)$ este deci o funcție care nu are alte singularități decît punctele b_n. Fiecare b_n este efectiv un pol pentru $f(z)$ și dezvoltarea lui $f(z)$ în serie Laurent în jurul acestui pol are ca parte principală $\pi_n \left(\frac{1}{z - b_n} \right)$. Aceasta se vede îndată pentru un b oarecare dat, lăsînd termenul relativ la acest b afară din suma de la (12). Se obține atunci o sumă olomorfă în jurul lui b și, adăugîndu-i apoi termenul relativ la b, o funcție care are în b un pol cu partea principală $\pi_n \left(\frac{1}{z - b} \right)$. Suma (12) reprezintă funcția $f(z)$ a lui Mittag-Leffler relativă la (10) și (11). Dacă printre polii b_n este și originea, rămîne să adăugăm la (12) pe $\pi_0 \left(\frac{1}{z} \right)$ corespunzător.

11. O funcție meromorfă oarecare $F(z)$ fiind dată, să considerăm polii ei (10) și părțile principale (11) din dezvoltările respective în serie Laurent a lui $F(z)$.

Fie $f(z)$ funcția lui Mittag-Leffler corespunzătoare. Avem evident

$$F(z) = G(z) + \pi_0 \left(\frac{1}{z} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pi_n \left(\frac{1}{z - b_n} \right) + P_n(z) \right], \tag{13}$$

unde $G(z)$ reprezintă o funcție întreagă.

Seria (13), care este valabilă în tot planul (z), constituie o reprezentare a funcției meromorfe $F(z)$ prin serie de funcții raționale simple, reprezentare analogă cu descompunerea în funcții raționale simple a unei funcții raționale oarecare.

12. Să considerăm acum cazul particular cînd toate polinoamele π_n din (11) ar fi de forma

$$\frac{N_n}{z - b_n},$$

unde N_n este un număr natural depinzînd de n.

Scriind în (10) polii pentru $N_n > 1$, de atîtea ori la rînd cîte unități are N_n, putem atunci să considerăm, pentru șirul (10) astfel completat, pe fiecare π_n de forma

$$\frac{1}{z - b_n}.$$

Dacă $n \geqslant k$, vom avea, în $\overline{\Delta}$,

$$\frac{1}{z-b_n} = -\frac{1}{b_n}\left[\frac{1}{1-\dfrac{z}{b_n}}\right] = -\frac{1}{b_n}\left[1+\frac{z}{b_n}+\left(\frac{z}{b_n}\right)^2+\ldots\right].$$

Deci

$$\frac{1}{z-b_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{z}{b_n^2}+\frac{z^2}{b_n^3}+\ldots+\frac{z^{p_n-1}}{b_n^{p_n}} = -\left[\frac{z^{p_n}}{b_n^{p_n+1}}+\frac{z^{p_n+1}}{b_n^{p_n+2}}+\ldots\right]. \quad (14)$$

În $\overline{\Delta}$, membrul al doilea din (14) este, în modul, inferior lui

$$\frac{\dfrac{|z|^{p_n}}{|b_n|^{p_n+1}}}{1-\left|\dfrac{z}{b_n}\right|} < \frac{q^{p_n}}{1-q} \quad (15)$$

și deci, tot ca și în § 6, dacă luăm $p_n = n$, seria

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left[\frac{1}{z-b_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{z}{b_n^2}+\frac{z^2}{b_n^3}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{b_n^n}\right]$$

este uniform convergentă în $\overline{\Delta}$. Așadar, seria

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-b_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{z}{b_n^2}+\frac{z^2}{b_n^3}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{b_n^n}\right] \quad (16)$$

este uniform convergentă în orice $\overline{\Delta}$, mărginit și închis, care nu conține puncte b_n, și suma ei $f(z)$ formează o funcție a lui Mittag-Leffler, relativă la polii b_n și π_n dați.

13. Dacă există un exponent de convergență finit pentru polii b_n din paragraful precedent, seria (16) poate fi înlocuită cu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-b_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{z}{b_n^2}+\frac{z^2}{b_n^3}+\ldots+\frac{z^{p-1}}{b_n^p}\right], \quad (16')$$

unde p are semnificația din § 8.

Într-adevăr, putem atunci înlocui pe (15) prin

$$\frac{\dfrac{|z|^{p_n}}{|b_n|^{p_n+1}}}{1-\left|\dfrac{z}{b_n}\right|} < \frac{M^{p_n}\dfrac{1}{|b_n|^{p_n+1}}}{1-q}, \quad (15')$$

unde $|z| < M$, cînd $z \in \overline{\Delta}$.

Dacă luăm $p_n = p$ și sumăm (15'), membrul din dreapta dă o serie convergentă. Deci, în (14), și, prin urmare, în (16), polinomul care se adaugă la $\frac{1}{z - b_n}$ poate fi luat de grad fix $p - 1$.

Ca exemplu, analog cu cel din § 9, să luăm aici funcția meromorfă $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$. Funcția-lui Mittag-Leffler, corespunzătoare polilor ei, care sînt $m\pi$ (cu m întreg arbitrar) și a căror parte principală este $\frac{1}{z - m\pi}$, va fi aici, după cele spuse în paragraful precedent,

$$\frac{1}{z} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{z - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right],$$

care diferă de $\operatorname{ctg} z$ printr-o funcție întreagă.

Vom vedea și aici că aceasta din urmă este identic zero.

II. FUNCȚIILE sin z, ctg z, $\sigma(z)$ și $\zeta(z)$

14. Procedeele indicate în secțiunea precedentă permit să se construiască funcții întregi și meromorfe speciale cu zerouri și cu poli prescriși. După cum vom vedea, se ajunge astfel mai întîi la unele funcții cunoscute din calculul diferențial clasic și apoi la altele analoge, introduse în mod oarecum natural.

Vom considera pentru aceasta distribuții regulate de puncte în plan, pe care le vom lua ca zerouri sau ca poli. Asemenea distribuții, pe care le vom defini îndată, le vom numi *rețele*, pentru că ele sînt constituite de vîrfurile unor rețele, care împart planul în porțiuni congruente.

15. Rețele de puncte în plan. Să considerăm p numere complexe ω_k ($k = 1,2,\ldots,p$) oarecare fixe, diferite de zero, și fie m_k, p numere întregi arbitrare.

Mulțimea punctelor reprezentate prin

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_p\omega_p, \tag{17}$$

cînd m_k parcurg, independent, toți întregii, se numește o *rețea*.

Numerele ω_k formează *baza rețelei*; ele sînt elementele bazei.

Este ușor de văzut că se poate obține aceeași rețea [adică aceeași mulțime (17)], plecînd eventual de la o altă bază; cu alte cuvinte, două baze diferite pot genera aceeași rețea. De exemplu, baza formată din elementele $\omega_1 = 1$ și $\omega_2 = i$ generează rețeaua întregilor lui Gauss; dar tot această rețea este generată, de exemplu, de baza formată de $\omega_1 = 1 + i$, $\omega_2 = i$.

În unele cazuri, o rețea generată de p elemente poate fi generată și de o bază formată de un număr mai mic de elemente.

În cazul acesta, baza se numește *reductibilă*. Astfel, rețeaua generată de $\omega_1 = 2$ și $\omega_2 = 3$ poate fi generată și de baza formată numai de $\omega_1 = 1$, adică ea este formată de mulțimea numerelor întregi.

16. T e o r e m ă. Fie $\{\omega\}$ o rețea generată de baza $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$. *Condiția necesară și suficientă pentru ca* $\{\omega\}$ *să poată fi generată și de o bază formată de un număr de elemente mai mic decît* p *este ca să existe* p *numere întregi* m_k^0, *nu toate egale cu zero, astfel încît să avem*

$$m_1^0\omega_1 + m_2^0\omega_2 + \ldots + m_p^0\omega_p = 0. \tag{18}$$

Se spune atunci că $\omega_k (k = 1,2, \ldots, p)$ sînt liniar *dependente*.

Condiția este necesară.

Într-adevăr, dacă există o bază $(\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_q')$, cu $q < p$, care generează aceeași rețea $\{\omega\}$, trebuie să avem numere întregi m_k^j $[k = 1, 2, \ldots, p;$ $j = 1, 2, \ldots, q]$ astfel ca

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= m_1^1\omega_1' + m_1^2\omega_2' + \ldots + m_1^q\omega_q' \\
\omega_2 &= m_2^1\omega_1' + m_2^2\omega_2' + \ldots + m_2^q\omega_q' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\omega_q &= m_q^1\omega_1' + m_q^2\omega_2' + \ldots + m_q^q\omega_q' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\omega_p &= m_p^1\omega_1' + m_p^2\omega_2' + \ldots + m_p^q\omega_q'
\end{aligned}$$

deoarece $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ fac parte din $\{\omega\}$.

Eliminînd cantitățile ω_j', se obțin îndată relații de tipul (18) între ω_k, relații în care cel puțin un coeficient este diferit de zero.

Condiția este suficientă.

Să presupunem că am avea un sistem de întregi m_k^0, satisfăcînd relația (18).

Dacă cel puțin unul dintre ei, fie m_p^0, este în valoare absolută egal cu 1, teorema este demonstrată, deoarece atunci avem

$$\pm\,\omega_p = m_1^0\omega_1 + m_2^0\omega_2 + \ldots + m_{p-1}^0\omega_{p-1}, \tag{19}$$

relație care arată că orice formă liniară cu coeficienți întregi de $\omega_k (k=1,2,\ldots,p)$ este și formă liniară cu coeficienți întregi de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}$, adică baza $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$ este reductibilă la $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1})$.

În cazul general, fie m_p^0 cel mai mic în valoare absolută dintre $m_k^0 \neq 0$ (sau unul dintre aceștia, dacă sînt mai mulți care au valoare absolută minimă).

Putem scrie atunci

$$\begin{aligned}
m_1^0 &= m_p^0 s_1 + r_1 \\
m_2^0 &= m_p^0 s_2 + r_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m_{p-1}^0 &= m_p^0 s_{p-1} + r_{p-1}
\end{aligned} \tag{20}$$

cu $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ întregi, iar $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ întregi în valoare absolută inferioară lui $|m_p^0|$. Toți acești r nu pot fi nuli, deoarece atunci (18) ar fi divizibil prin m_p^0 și am fi reduși la cazul particular precedent.

Substituind (20) în (18), obținem

$$m_p^0(s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \ldots + s_{p-1}\omega_{p-1} + \omega_p) + r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + \ldots + r_{p-1}\omega_{p-1} = 0.$$

Să punem

$$\omega_p' = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \ldots + s_{p-1}\omega_{p-1} + \omega_p. \tag{21}$$

Baza $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}, \omega_p')$ va genera *aceeași rețea* ca și baza inițială $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$. Dar între elementele noii baze avem acum relația

$$r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + \ldots + r_{p-1}\omega_{p-1} + m_p^0\omega_p' = 0, \tag{18'}$$

în care nici un coeficient nu este superior vreunui coeficient m_k^0 din (18), iar $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ sînt toți *inferiori, în valoare absolută, tuturor* m_k^0.

Am redus deci baza inițială la o alta $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}, \omega_p')$, formată tot din p elemente, care sînt însă legate printr-o relație de tipul (18) [relația (18')] cu $p - 1$ coeficienți în valoare absolută mai mici decît cei din relația (18) inițială și nu toți nuli.

Aplicînd noii baze același raționament ca și celei dintîi, vom micșora treptat, în valoare absolută, coeficienții relației (18) dintre elementele bazei și vom ajunge, neapărat, la o bază (generînd tot rețeaua $\{\omega\}$), în care relația corespunzătoare lui (18) va avea cel puțin un coeficient egal, în valoare absolută, cu 1. Dar atunci, după cum am observat, unul dintre elementele bazei este expresie liniară cu coeficienți întregi de celelalte $p - 1$ elemente ca în (19) și deci baza se reduce la aceste $p - 1$ elemente.

17. Să considerăm acum o rețea generată de o bază formată numai din *două elemente* ω_1 și ω_2. Rețelele

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

cu m_1 și m_2 întregi arbitrari, prezintă, după cum vom vedea, un interes deosebit pentru teoria funcțiilor uniforme.

Distingem, după teorema din paragraful precedent, două cazuri:

1° baza (ω_1, ω_2) este formată din elemente liniar independente;

2° avem două numere întregi (diferite de zero) m_1^0 și m_2^0, astfel ca

$$m_1^0\omega_1 + m_2^0\omega_2 = 0.$$

În acest din urmă caz, am văzut că *baza este reductibilă.*

Există atunci un ω_1', făcînd parte din rețeaua dată și astfel încît toate punctele rețelei sînt de formă $m\omega_1'$, cu m întreg arbitrar.

În primul caz avem două posibilități:

a) raportul $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este un număr complex nereal, și

b) raportul $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este un număr real, neapărat irațional, deoarece altfel am cădea în cazul 2° de mai sus.

Dacă $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *nu* este un număr real, *vectorii* corespunzători formează un unghi $\neq m\pi$ (m întreg) și deci $\{\omega\}$ *este format din vîrfurile unei rețele de paralelograme identice, fără puncte interioare comune și care acoperă planul întreg*. Acesta este cazul cel mai important pentru noi.

Dacă $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este un număr real irațional, punctele lui $\{\omega\}$ admit neapărat puncte de acumulare pe dreapta pe care sînt așezate*.

Pe dreapta (d), determinată de vectorul ω_2 (aplicat în origine), să considerăm punctele $m\omega_2$, cu m întreg arbitrar, și să spunem că două puncte de pe (d) sînt *congruente* dacă afixele lor diferă printr-un $m\omega_2$. Orice punct de pe (d) are un congruent pe segmentul (σ) al lui (d) cu extremitățile $z = 0$ și $z = \omega_2$.

Să considerăm acum punctele $n\omega_1$, cu n întreg arbitrar.

Din cauza că $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este un număr real, ele sînt toate așezate tot pe (d). Vom arăta că două puncte $n\omega_1$ și $n'\omega_1$ distincte ($n \neq n'$) nu pot avea un același congruent pe (σ).

Într-adevăr, am avea atunci

$$(n - n')\omega_1 = (m - m')\omega_2,$$

cu n, n', m și m' întregi și deci $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ar fi un număr rațional, contrar ipotezei.

Dar există o infinitate de puncte $n\omega_1$ ($n = 1,2,3, \ldots$) și deci există, pe (σ) o infinitate de puncte congruente cu punctele $n\omega_1$. Toate acestea fac parte din $\{\omega\}$, deoarece ele sînt de forma $n\omega_1 + n\omega_2$. Ele au un punct de acumulare pe (σ), după teorema Weierstrass-Bolzano (cap. I, § 6).

Propoziția noastră este deci demonstrată.

18. Să trecem acum la o rețea generată de $p > 2$ elemente.

Vom arăta (teorema lui Jacobi) că dacă baza ei nu este reductibilă la două elemente, mulțimea $\{\omega\}$ are neapărat puncte de acumulare în plan la distanță finită.

Nu pot exista deci, în acest caz, funcții meromorfe, avînd punctele rețelei ca poli, sau funcții întregi, avînd aceste puncte ca zerouri. Acest fapt pune în evidență interesul pe care îl reprezintă pentru noi rețelele a căror bază este formată din două elemente.

Pentru a demonstra teorema lui Jacobi, este suficient să arătăm că o bază ireductibilă, formată din trei elemente, generează o rețea $\{\omega\}$, care are neapărat puncte de acumulare la distanță finită.

---

* Este evident că, dacă $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este un număr real, toate punctele lui $\{\omega\}$ sînt pe o aceeași dreaptă în plan.

Fie $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ baza ireductibilă a rețelei $\{\omega\}$ (fig. 20).

Dacă $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este real și irațional, teorema este demonstrată în paragraful precedent.

Pe de altă parte, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nu poate fi real și rațional, deoarece atunci, după 16, baza ar fi reductibilă. Trebuie deci să presupunem că $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este nereal. Atunci ω_1 și ω_2 formează o rețea de paralelograme acoperind planul, toate identice cu paralelogramul (haşurat în fig. 20) construit pe vectorii ω_1 și ω_2, aplicați în O.

Fie (P) acest paralelogram. Dacă numim aici congruente două puncte din plan ale căror afixe diferă printr-un număr complex de forma

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

cu m_1 și m_2 întregi, orice punct din plan are un congruent în (P).

Dar două puncte distincte $n\omega_3$ și $n'\omega_3$ $(n \neq n')$ nu pot avea același congruent în (P), deoarece am avea atunci

$$(n - n')\,\omega_3 = (m_1 - m'_2)\,\omega_1 + (m_2 - m'_2)\,\omega_2,$$

ceea ce ar însemna că baza $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ este reductibilă, contrar ipotezei. Cum congruenții oricărui $n\omega_3$ sînt în $\{\omega\}$ și cum există o infinitate de $n\omega_3$, se vede (ca și în paragraful precedent) că punctele $\{\omega\}$ au un punct de acumulare în (P).

19. Din această analiză a tuturor cazurilor de rețele în plan, reținem ca interesante pe cele care *nu* au puncte de acumulare la distanță finită, adică, după cele ce preced rețelele generate de o bază formată *de un singur element* ω_1 și cele generate de o bază formată din *două elemente* (ω_1, ω_2), *astfel că* $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *să fie un număr nereal.*

Și într-un caz și în altul, avem, pentru mulțimea $\{\omega\}$ corespunzătoare, un exponent de convergență finit.

În primul caz, se vede îndată că seria

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{m^\lambda\,|\,\omega_1|^\lambda}$$

este convergentă pentru $\lambda > 1$ și divergentă pentru $\lambda \leqslant 1$.

Avem deci $p = 1$.

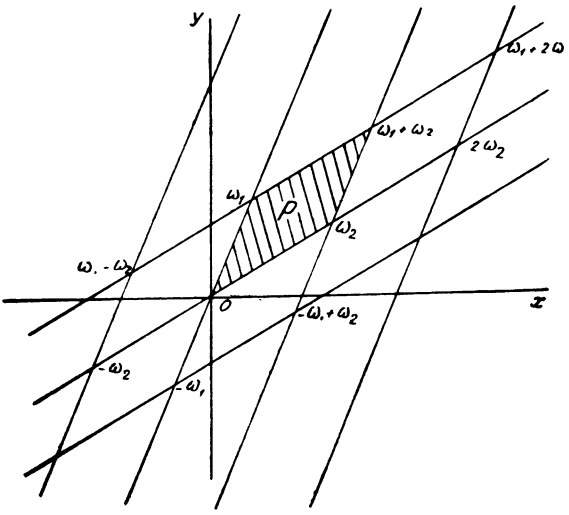


Fig. 20

În al doilea caz, avem seria dublă

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{|m\omega_1 + n\omega_2|^\lambda}, \tag{22}$$

în care accentul pus lîngă semnul $\sum$ arată că $m = n = 0$ trebuie exclus din sumație.

Pentru a determina valoarea exponentului maxim de divergență, λ, să considerăm poligoanele π_k cu centrul în $z = 0$ și cu vîrfurile

$$-k\omega_1 - k\omega_2, \quad -k\omega_1 + k\omega_2, \quad k\omega_1 - k\omega_2, \quad k\omega_1 + k\omega_2.$$

Fie δ distanța minimă și Δ distanța maximă de la 0 la π_1. Pentru π_k, aceste distanțe vor fi, respectiv, $k\delta$ și $k\Delta$.

Pe π_k se află exact $8k$ puncte $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$.

Într-adevăr, pe fiecare latură sînt $2k + 1$, astfel de puncte, în total $8k + 4$, în care vîrfurile sînt socotite de două ori, deci exact $8k$ puncte ω pe π_k.

În (22), contribuția acestor $8k$ puncte este cuprinsă între

$$\frac{8}{\Delta^\lambda\, k^{\lambda-1}} \quad \text{și} \quad \frac{8}{\delta^\lambda\, k^{\lambda-1}},$$

adică seria (22) este convergentă pentru $\lambda - 1 > 1$ și divergentă pentru $\lambda - 1 \leqslant 1$.

Avem deci $p = 2$.

20. Să formăm, pentru primul caz, funcțiile definite prin

$$z \prod_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{m\omega_1}\right) e^{\frac{z}{m\omega_1}} \tag{23}$$

$$\frac{1}{z} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{z - m\omega_1} + \frac{1}{m\omega_1}\right] \tag{24}$$

iar, pentru al doilea caz, funcțiile

$$z \prod_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{m\omega_1 + n\omega_2}\right) e^{\frac{z}{m\omega_1 + n\omega_2} + \frac{z^2}{2(m\omega_1 + n\omega_2)^2}} \tag{25}$$

$$\frac{1}{z} + \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{z - (m\omega_1 + n\omega_2)} + \frac{1}{m\omega_1 + n\omega_2} + \frac{z}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}\right], \tag{26}$$

aplicînd respectiv procedeele lui Weierstrass și Mittag-Leffler, pentru formarea funcțiilor întregi și meromorfe (canonice) corespunzătoare acestor rețele (funcțiile întregi cu zerouri simple în punctele rețelei și funcțiile meromorfe cu poli simpli și reziduul 1 în aceste puncte).

Vom vedea că funcțiile (23) și (24) se reduc ușor la funcții trigonometrice cunoscute.

Funcțiile (25) și (26) constituie extensiunile naturale ale acestora, introduse de K. Weierstrass în teoria funcțiilor eliptice.

21. Seria care definește funcția (24) poate fi derivată termen cu termen (fiind uniform convergentă în orice domeniu mărginit și închis ce nu conține puncte ω) și dă, după schimbarea semnelor termenilor,

$$\varphi_{\omega_1}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z - m\omega_1)^2}. \tag{27}$$

Să luăm $\omega_1 = \pi$.

Vom avea atunci, partea principală din seria Laurent a fiecărui pol pentru $\frac{1}{\sin^2 z}$ fiind tocmai termenii seriei (27),

$$\varphi_\pi(z) - \frac{1}{\sin^2 z} = G(z), \tag{28}$$

unde $G(z)$ este o funcție întreagă, care urmează să fie determinată.

Fie B banda cuprinsă între axa pur imaginară a planului (z) și paralela la ea dusă prin $z = \pi$.

În această bandă, x este pe segmentul $(0, \pi)$, iar y variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

Se vede cu ușurință $\left(\text{scriind } \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}\right)$ că, în B, avem

$$\lim_{|y| \to \infty} \left|\frac{1}{\sin^2 z}\right| = 0.$$

Pe de altă parte, tot în B, avem și

$$\lim_{|y| \to \infty} |\varphi_\pi(z)| = 0. \tag{29}$$

Într-adevăr, pentru $z \in B$ avem, cum se vede cu ușurință pe figura 21

$$|\varphi_\pi(z)| \leqslant \left|\frac{1}{z}\right|^2 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left|\frac{1}{z - m\pi}\right|^2 \leqslant \left|\frac{1}{z}\right|^2 + 2 \sum_{m=\mu+1}^{+\infty} \frac{1}{(m-1)^2\pi^2} + \sum_{m=-\mu}^{+\mu}{}' \left|\frac{1}{z - m\pi}\right|^2.$$

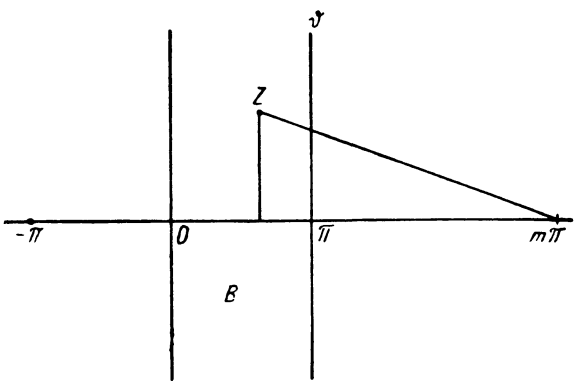
Seria cu termeni constanți din ultimul membru fiind însă convergentă, se poate lua μ destul de mare pentru ca

$$2 \sum_{m=\mu+1}^{+\infty} \frac{1}{(m-1)^2\pi^2} < \varepsilon,$$

$\varepsilon > 0$ fiind dat arbitrar.

Deci, pentru $z \in B$,

$$|\varphi_\pi(z)| < \left|\frac{1}{z}\right|^2 + \sum_{m=-\mu}^{+\mu}{}' \left|\frac{1}{z - m\pi}\right|^2 + \varepsilon.$$



Fig, 21

Din această inegalitate se vede că, dacă $|z| \to \infty$ în B, $|\varphi_\pi(z)|$ rămîne inferior lui 2ε, de la o valoare $|z|$ destul de mare înainte. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, se vede că avem (29).

Deci, după (28), avem, pentru $z \in B$, și

$$\lim_{|z| \to \infty} |G(z)| = 0, \tag{30}$$

adică $|G(z)|$ este mărginită în B.

Dar, atît $\varphi_\pi(z)$ cît și $\frac{1}{sin^2 z}$, și deci $G(z)$, iau aceleași valori în z și în $z + m\pi$, oricare ar fi întregul m. Deci $|G(z)|$ este mărginită în tot planul (z).

După teorema lui Liouville, de mai multe ori amintită, $G(z)$ este deci o constantă și (30) arată că această constantă este nulă.

Avem deci

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z - m\pi)^2} = \varphi_\pi(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

și deci

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z - m\omega_1)^2} = \varphi_{\omega_1}(z) = \frac{\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2}{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega_1}}.$$

22. Dacă integrăm acum, între 0 și z, funcția

$$\frac{\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2}{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega_1}} - \frac{1}{z^2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z - m\omega_1)^2},$$

se obține, schimbînd semnele,

$$\frac{\pi}{\omega_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{\omega_1} - \frac{1}{z} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z - m\omega_1} + \frac{1}{m\omega_1} \right), \tag{31}$$

care arată că *suma seriei* (24) *este* $\frac{\pi}{\omega_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{\omega_1}$.

Să integrăm acum (31) tot între 0 și z.

Vom obține

$$\ln\left(\frac{\sin \frac{\pi z}{\omega_1}}{z} \right) - \ln \frac{\pi}{\omega_1} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{m\omega_1}\right) + \frac{z}{m\omega_1} \right],$$

sau

$$\sin\frac{\pi z}{\omega_1} = \frac{\pi}{\omega_1} z \prod_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{m\omega_1}\right) e^{\frac{z}{m\omega_1}}, \tag{32}$$

care arată că *produsul infinit* (23) *este* $\frac{\omega_1}{\pi} \sin\frac{\pi z}{\omega_1}$.

În particular, pentru $\omega_1 = \pi$, relațiile (31) și (32) dau dezvoltarea în serie de funcții raționale a lui ctg z și dezvoltarea în produs infinit a lui sin z. Ele arată că termenul adițional și exponentul, de la §§ 13 și 9 din secțiunea precedentă, sînt nuli, după cum am anunțat.

23. Funcțiile definite prin (25) și (26) sînt *funcțiile lui Weierstrass*, care se notează respectiv $\sigma(z)$ și $\zeta(z)$.

Funcția $\sigma(z)$ este întreagă și are punctele $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ (m și n întregi arbitrari) ca zerouri simple.

Funcția $\zeta(z)$ este meromorfă și are aceleași puncte ca poli simpli cu reziduul 1.

Și una și alta sînt perfect determinate cînd ne dăm rețeaua $\{\omega\}$.

Se vede îndată din (25) și (26) că avem, oricare ar fi z,

$$\sigma(z) = -\sigma(-z)$$
$$\zeta(z) = -\zeta(-z),$$

adică σ și ζ sînt funcții *impare*.

Într-adevăr, înlocuind pe z cu $-z$ în produsul infinit din (25), putem înlocui pe m și n, respectiv, cu $-m$ și $-n$, deoarece produsul se întinde asupra *tuturor* valorilor întregi m și n.

Produsul infinit rămîne deci neschimbat dacă înlocuim pe z cu $-z$, ceea ce arată că $\sigma(z)$ este impar.

Dacă facem aceleași înlocuiri în (26), se vede că și $\zeta(z)$ este impară.

Funcțiile (23) și (24) *admit rețeaua* $m\omega_1$ *ca perioadă*. Aceasta înseamnă că aceste funcții rămîn neschimbate dacă se înlocuiește în ele z cu $z + m\omega_1$, oricare ar fi întregul m.

Funcțiile σ și ζ definite prin (25) și (26), *nu admit* ca perioadă rețeaua $m\omega_1 + m\omega_2$ dar ele se transformă în mod simplu prin adăugarea la z a unui ω, din această rețea.

Vom da îndată expresia acestor transformări.

24. Funcția $\wp(z)$ a lui Weierstrass. În mod analog cu ceea ce am făcut pentru (24), să derivăm termen cu termen seria (26). Obținem aici

$$\frac{d}{dz}\zeta(z) = -\left\{\frac{1}{z^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{[z-(m\omega_1+n\omega_2)]^2} - \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\right]\right\}.$$

Se notează, după K. Weierstrass, cu $\mathfrak{p}(z)$ funcția care este reprezentată prin paranteza din membrul al doilea. Avem deci

$$\mathfrak{p}(z) = -\frac{d}{dz}\zeta(z). \tag{33}$$

Se constată îndată că $\mathfrak{p}(z) = \mathfrak{p}(-z)$, adică $\mathfrak{p}(z)$ este funcție *pară*. Derivînd încă o dată, obținem

$$\mathfrak{p}'(z) = \frac{d}{dz}\mathfrak{p}(z) = -2\left[\frac{1}{z^3} + \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{[z-(m\omega_1+n\omega_2)]^3}\right] \tag{34}$$

Dacă adăugăm lui z, în $\mathfrak{p}'(z)$, un ω oarecare din $\{\omega\}$ [rețeaua generată de (ω_1, ω_2)], se vede îndată din seria (34) că $\mathfrak{p}'(z+\omega) = \mathfrak{p}'(z)$.

Avem deci, trecînd la funcția primitivă,

$$\mathfrak{p}(z+\omega) = \mathfrak{p}(z) + C,$$

C fiind o constantă.

Dar $\mathfrak{p}(z)$ este o funcție pară și deci, dacă facem $z = -\frac{\omega}{2}$, trebuie să avem

$$\mathfrak{p}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \mathfrak{p}\left(-\frac{\omega}{2}\right).$$

Deci, $C = 0$ și funcția $\mathfrak{p}(z)$ *admite și ea ca perioadă rețeaua* $\{\omega\}$, *generată de* (ω_1, ω_2).

Funcția $\mathfrak{p}(z)$ este o funcție meromorfă dublu periodică. Vom vedea, în capitolul următor, rolul important pe care ea îl joacă în teoria generală a acestor funcții. Deocamdată, ea ne va servi pentru a găsi transformările funcțiilor $\zeta(z)$ și $\sigma(z)$, cînd se adaugă lui z o «perioadă», adică unul oarecare din numerele complexe $m\omega_1 + m\omega_2$, care formează «rețeaua de perioade».

25. Din relația

$$\mathfrak{p}(z+\omega) = \mathfrak{p}(z),$$

valabilă pentru orice ω din rețeaua generată de (ω_1, ω_2) și pentru orice z, se deduce, pentru funcțiile primitive, după (33),

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + C.$$

Cum $\zeta(z)$ este impară, avem, făcînd $z = -\frac{\omega}{2}$,

$$C = 2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Se notează cu η valoarea $\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Pentru fiecare punct ω din rețeaua noastră avem un η corespunzător, iar efectul adăugării lui ω la z se exprimă prin transformarea

$$\zeta(z + \omega) = \zeta(z) + 2\eta. \tag{35}$$

26. Între $\wp(z)$ și $\zeta(z)$ există relația (33), adică aceeași ca între $\frac{1}{\sin^2 z}$ și ctg z.

Tot astfel, între $\zeta(z)$ și $\sigma(z)$ există aceeași relație ca între ctg z și sin z.

Într-adevăr, dacă integrăm între 0 și z, pe un drum care evită punctele ω, relația de definiție a lui $\zeta(z)$,

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}'' \left[\frac{1}{[z-(m\omega_1+n\omega_2)]} + \frac{1}{m\omega_1 + n\omega_2} + \frac{z}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}\right]$$

și ținem seama și de definiția lui $\sigma(z)$, obținem

$$\int_0^z \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \ln\left(1 - \frac{z}{m\omega_1 + n\omega_2}\right) + \\ + \frac{z}{m\omega_1 + n\omega_2} + \frac{z^2}{2(m\omega_1 + n\omega_2)^2},$$

adică

$$ze^{\int_0^z \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du} = \sigma(z). \tag{36}$$

Sub această formă, drumul de integrare ales între 0 și z nu mai influențează asupra valorii membrului întîi, pentru că valorile exponentului care corespund diverselor drumuri dintre 0 și z diferă între ele printr-un multiplu întreg de $2\pi i$, reziduurile funcției de sub semnul integral fiind toate egale cu 1.

Din (36) se deduce îndată

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz} \ln \sigma(z), \tag{37}$$

adică aceeași relație ca și cea care leagă pe ctg z de sin z.

27. Să cercetăm acum efectul pe care îl produce asupra funcției $\sigma(z)$, adăugarea la z a unui ω dat, din rețeaua noastră.

Avem, după (36),

$$\sigma(z + \omega) = (z + \omega)\, e^{\int_0^{z+\omega} \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du}$$

și deci

$$\frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)} = \frac{z+\omega}{z} e^{\int_z^{z+\omega}\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)du} = e^{\int_z^{z+\omega}\zeta(u)\,du}. \tag{38}$$

Să punem

$$\Phi(z) = \int_z^{z+\omega} \zeta(u)\,du.$$

Cum, după (35),

$$\Phi'(z) = \zeta(z+\omega) - \zeta(z) = 2\eta$$

se vede că

$$\Phi(z) = 2\eta z + C. \tag{39}$$

Pentru a determina acum constanta C, să facem $z = -\frac{\omega}{2}$ în expresia lui $\Phi(z)$.

Avem, presupunînd că $\frac{\omega}{2}$ nu face parte din rețeaua $\{\omega\}$,

$$\Phi\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \zeta(u)\,du = \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right)du + \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \frac{du}{u}.$$

Din cauză că $\zeta(u) - \frac{1}{u}$ este funcție impară, în ultimul membru din această egalitate, prima integrală este zero dacă integrăm pe un drum simetric față de origine, care nu trece prin nici un $\omega \neq 0$ din rețeaua noastră $\{\omega\}$.

Ultima integrală este egală cu $(2k+1)\pi i$, cu k întreg.

Avem, așadar,

$$C = \omega\eta + (2k+1)\,\pi i,$$

adică

$$\Phi(z) = 2\eta z + \omega\eta + (2k+1)\,\pi i,$$

ceea ce introdus în (39) și (38), dă (pentru că $e^{(2k+1)\pi i} = -1$)

$$\sigma(z+\omega) = -\sigma(z)\, e^{2\eta z + \eta\omega}, \tag{40}$$

formulă care exprimă efectul adăugării lui ω la z asupra funcției $\sigma(z)$.

28. Formulele (35) și (40) ne vor fi foarte utile în studiul funcțiilor dublu periodice, în capitolul următor.

Am văzut că funcția $\wp(z)$ satisface relația

$$\wp(z+\omega) = \wp(z),$$

oricare ar fi ω din rețeaua $m\omega_1 + n\omega_2$ și oricare ar fi z. Ea este o funcție *dublu periodică*.

În teoria generală a funcțiilor meromorfe dublu periodice, $\wp(z)$ joacă, după cum vom vedea, un rol fundamental.

III. FUNCȚIA $\Gamma(s)$ ȘI FUNCȚIA $\zeta(s)$ A LUI RIEMANN

29. După cum se obișnuiește, vom nota aici, după R i e m a n n, variabila complexă cu $s = \sigma + it$, atît în funcția $\zeta(s)$ a lui Riemann, pe care o vom defini mai jos, cît și în funcția $\Gamma(s)$, cu care $\zeta(s)$ este în strînsă legătură.

În diverse formule somatorii, L. E u l e r a introdus o funcție notată azi curent cu Γ, și numită «funcția gamma», transcendentă importantă, care joacă un rol însemnat în analiză. Pentru a rămîne în ordinea de idei pe care am urmărit-o în acest capitol pînă aici, vom considera, *a priori*, produsul canonic

$$E(s) = s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}, \tag{41}$$

format cu zerourile $0, -1, -2, \ldots$, produs analog cu expresia lui $\sin z$. Avem deci, după definiția de mai sus,

$$E(s) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{s(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{s}{n}\right)}{e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}} \right].$$

Dacă punem

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C_n,$$

se știe că $\lim_{n\to\infty} C_n = C$, care este un număr pozitiv, cunoscut sub numele de «constanta lui Euler». Deci, după transformări imediate, avem

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{s(1+s)(2+s)\ldots(n+s)}{n!\, n^s} \right] = e^{Cs} E(s). \tag{42}$$

În această expresie, n^s trebuie luat egal cu $e^{s \ln n}$, unde $\ln n$ este real. Expresia (42) are, așadar, o limită bine determinată pentru $n \to \infty$, oricare ar fi s.

30. Pentru x real și pozitiv, integrala

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{43}$$

are un sens bine determinat, finit.

Pentru $x = N$ (N întreg pozitiv) se verifică îndată că avem, pentru $N > 1$,

$$\int_0^{\infty} t^{N-1} e^{-t}\, dt = (N-1)!,$$

astfel încît, funcția de x definită prin (43), continuă și crescătoare de x (pentru $x > 0$), constituie o extensiune a factorialului, la valorile reale pozitive oarecare ale lui x. Ea se desemnează prin $\Gamma(x)$. În cursurile de analiză* se demonstrează că avem

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!\, n^x}{x(1+x)(2+x)\ldots(n+x)}\right],$$

formulă datorită lui E u l e r și lui G a u s s.

Definiția funcției $\Gamma(x)$ este astfel extinsă la valorile complexe s oarecare și avem, după (42),

$$\Gamma(s) = \frac{1}{e^{Cs}\, E(s)}. \tag{44}$$

Se vede astfel că $\Gamma(s)$ este o funcție meromorfă în tot planul (s), avînd poli simpli în punctele $s = 0, -1, -2, \ldots$ și neavînd nici un zero.

31. Ecuația funcțională a lui $\Gamma(s)$. Din (42) și (44) se deduce, pentru orice s diferit de orice întreg pozitiv,

$$\Gamma(1-s) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!\, n^{1-s}}{(1-s)(2-s)\ldots(n+1-s)}\right].$$

Deci, pentru s diferit de orice întreg,

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \tag{45}$$

relație funcțională pe care o satisface $\Gamma(s)$.

Din (45) se deduce în particular, pentru $s = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

32. Funcția $\zeta(s)$ a lui Riemann. Într-un memoriu celebru asupra distribuției numerelor prime, B. R i e m a n n a introdus funcția de variabila complexă s, numită de atunci «funcția zeta» și definită prin seria

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots, \tag{46}$$

unde prin n^s trebuie înțeles, tot ca mai sus, valoarea $e^{s \ln n}$, pentru $\ln n$ *real*.

Se vede îndată că suma din (46) reprezintă o funcție olomorfă de $s = \sigma + it$ în tot semiplanul $\sigma > 1$. Într-adevăr, seria este absolut și uniform

* A se vedea, de exemplu, C h. d e l a V a l l é e P o u s s i n, *Cours d' Analyse infinitésimale*, Gauthier-Villars, Paris, 1949, t. II, sau M i r o n N i c o l e s c u, *Analiza matematică*, București, 1953, v. II.

convergentă în orice domeniu mărginit așezat în acest semiplan, deoarece avem

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma}.$$

După teorema lui Weierstrass (cap. V, § 1), suma $\zeta(s)$ este deci olomorfă în orice astfel de domeniu, deoarece termenii seriei (46) sînt evident funcții olomorfe de s.

Pentru a ne da seama de importanța funcției $\zeta(s)$ în cercetările privitoare la numerele prime, să dăm o altă expresie a ei, cunoscută încă de L. E u l e r.

Să formăm diferența

$$\zeta(s) - \zeta(s)\, 2^{-s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots, \tag{47}$$

unde, în membrul al doilea, vor figura toți termenii din (46), în afară de cei pentru care n este multiplu de 2.

Dacă înmulțim acum (47) cu 3^{-s} și formăm diferența

$$\zeta(s)\,[1 - 2^{-s}] - \zeta(s)\,[1 - 2^{-s}]\,3^{-s} = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots,$$

în membrul al doilea vor figura numai termenii pentru care n nu este multiplu nici de 2, nici de 3.

Continuînd astfel, vom avea, după înmulțiri cu p^{-s} (p fiind număr prim),

$$\zeta(s)\,[1 - 2^{-s}][1 - 3^{-s}] \ldots [1 - p^{-s}] = 1 + \sum \frac{1}{n^s}, \tag{48}$$

în Σ figurînd numai termeni pentru care n nu este multiplu de nici unul din numerele prime $\leqslant p$.

Deci, toți acești n sînt mai mari decît p.

Rezultă de aici că membrul al doilea din (48) tinde către 1 cînd p crește trecînd succesiv prin toate valorile prime și că această convergență este uniformă pentru $\sigma \geqslant 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, oarecare).

Deci $\zeta(s)$ se poate reprezenta prin produsul infinit

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \tag{49}$$

unde p trece, succesiv, prin toate valorile prime > 1, produs uniform convergent pentru $\sigma \geqslant 1 + \varepsilon$.

33. Atît (46) cît și (49) sînt valabile pentru $\sigma > 1$.

Vom extinde acum, după B. R i e m a n n, definiția lui $\zeta(s)$ la tot planul (s).

Dacă, în (43), facem schimbarea de variabilă $t = nu$ și înlocuim apoi pe x prin s, obținem

$$\Gamma(s) = n^s \int_0^\infty u^{s-1} e^{nu}\, du. \tag{50}$$

De aici, ținînd seama de faptul că (46) este valabilă ca și (50) pentru $\sigma > 1$, se obține

$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \int_0^\infty u^{s-1}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nu}\right) du = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1}\,. \tag{51}$$

Relația aceasta nu are sens nici ea decît pentru $\sigma > 1$. Dar ea ne va permite să prelungim definiția lui $\zeta(s)$.

34. Vom transforma pentru aceasta integrala din (51), înlocuind drumul de integrare de pe axa reală cu un drum L (fig. 22), care nu mai trece prin origine și este definit după cum urmează: drumul L este format din porțiunea de axă reală $\Re u \geqslant \rho$ (cu $\rho > 0$), parcursă de la $+\infty$ la ρ, din cercul γ cu centrul în O și raza ρ, parcurs o dată în sens direct, și, în sfîrșit, din aceeași porțiune de axă reală parcursă de la ρ la $+\infty$ (fig. 22). Drumul L în întregime este deci parcurs astfel cum este indicat în figura 22.

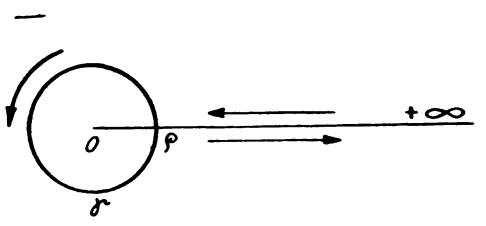


Fig. 22

Avem, așadar, dacă determinarea aleasă pentru u^{s-1} pe porțiunea $(+\infty, \rho)$ a lui L este cea care rezultă din alegerea lui $\ln u$ *real*, în $u^{s-1} = e^{s \ln u}$ relația

$$\int_L \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1} = -\int_\rho^\infty \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1} + \int_\gamma \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1} + e^{2\pi i s}\int_\rho^\infty \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1}\,, \tag{52}$$

egalitate valabilă pentru orice valoare complexă finită a lui s.

Integrala din membrul întîi al lui (52) este independentă de ρ, îndată ce $\rho < 2\pi$. Făcînd, pe de altă parte, $\rho \to 0$, prima și ultima integrală din membrul al doilea au limite bine determinate, *dacă* $\sigma > 1$, și tot cu această condiție, integrala a doua tinde către zero.

Avem deci, pentru $\sigma > 1$,

$$\int_L \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1} = (e^{2\pi i s} - 1)\int_0^\infty \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1}\,,$$

ceea ce substituit în (51) dă

$$(e^{2\pi i s} - 1)\,\Gamma(s)\,\zeta(s) = \int_L \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1}\,. \tag{53}$$

Egalitatea (53) coincide cu (51) pentru $\sigma > 1$. Membrul al doilea din (53) are însă un sens bine determinat și o valoare finită pentru orice s finit. De aici vom deduce extensiunea definiției lui $\zeta(s)$, definiție care va coincide cu cea dată în (46) pentru $\sigma > 1$.

35. Se arată ușor că funcția

$$\Phi(s) = \int_L \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1}$$

este o funcție întreagă.

Într-adevăr, fie L_n porțiunea din L cuprinsă în $|u| \leqslant n$. Un calcul simplu arată că

$$\Phi_n(s) = \int_{L_n} \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1}$$

admite derivată finită în raport cu s, în orice punct al planului (s) și deci că funcțiile $\Phi_n(s)$ sînt întregi. Pe de altă parte, în orice domeniu mărginit din (s), aceste funcții tind uniform către $\Phi(s)$. Teorema lui Weierstrass (cap. V) arată, așadar, că $\Phi(s)$ este întreagă.

Din (53) rezultă atunci îndată că $\zeta(s)$ *este meromorfă*. Cum $\Gamma(s)$ nu are zerouri, singurele puncte care ar putea fi poli ai lui $\zeta(s)$ sînt valorile întregi ale lui s. Dar pentru $\sigma > 1$ am văzut că $\zeta(s)$ este olomorfă, iar cum $\Gamma(s)$ are ca poli simpli toate valorile întregi nepozitive ale lui s, acestea nu mai sînt poli pentru $\zeta(s)$. Rezultă că $\zeta(s)$ *nu are decît un singur pol în* $s = 1$ *și că acest pol este simplu.*

36. Relația funcțională a lui Riemann pentru $\zeta(s)$. Să considerăm, în planul variabilei complexe (u), drumul de integrare L, definit mai sus, și cercurile C_k, definite prin $|u| = (2k + 1)\pi$, unde k este un întreg oarecare.

Expresia

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_k} \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1} - \int_L \frac{u^{s-1}\,du}{e^u - 1}\right], \tag{54}$$

în care presupunem s real și $\rho < 1$, iar integralele sînt luate în sens direct plecînd din $u = (2k + 1)\pi$, este după teorema fundamentală a lui Cauchy egală cu suma reziduurilor polilor cuprinși între cercurile $|u| = \rho$ și C_k.

Or, acești poli sînt $u = 2n\pi i$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k)$ și sînt toți simpli. Reziduurile respective sînt deci, pentru $n > 0$,

$$(2n\pi)^{s-1} e^{\frac{\pi}{2}(s-1)i} = (2n\pi)^{s-1} e^{-\frac{\pi}{2}(s-1)i}\, e^{\pi(s-1)i},$$

iar pentru $n < 0$,

$$(2|n|\pi)^{s-1} e^{\frac{3\pi}{2}(s-1)i} = (2|n|\pi)^{s-1} e^{\frac{\pi}{2}(s-1)i} \cdot e^{\pi(s-1)i},$$

unde valorile luate pentru puterile $s - 1$ în primii factori sînt evident cele pozitive. Deci, valoarea expresiei (54) este

$$e^{\pi(s-1)i}(2\pi)^{s-1} \cdot 2\cos\frac{\pi}{2}(s-1) \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1-s}}$$

adică avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{u^{s-1}\,du}{e^u-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{u^{s-1}\,du}{e^u-1} - e^{\pi(s-1)i}\cdot(2\pi)^{s-1}\cdot 2\cos\frac{\pi}{2}(s-1)\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^{1-s}}\cdot$$

Substituind această valoare a integralei din membrul întîi în (53) și înlocuind apoi pe s cu $1-s$, obținem

$$\frac{e^{-2\pi is}-1}{2\pi i}\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{u^{-s}\,du}{e^u-1} - e^{-\pi is}\cdot(2\pi)^{-s}\cdot 2\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^s}\cdot$$

Dacă presupunem $s>1$, integrala din membrul al doilea, care este inferioară, în modul, lui

$$\alpha\,(2k+1)^{1-s},$$

unde α este o constantă >0, tinde către zero cu $\frac{1}{k}\cdot$ Deci, pentru $k\to\infty$, obținem, înmulțind cu $e^{\pi is}$ și ținînd seama de (46),

$$\frac{\sin\pi s}{\pi}\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) = (2\pi)^{-s}\cdot 2\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(s),$$

ceea ce, în baza relației funcționale (45) pe care o satisface $\Gamma(s)$, dă

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s}\,\Gamma(s)\,\zeta(s). \tag{55}$$

Relația aceasta este valabilă pentru s real și >1. Dar toate funcțiile care figurează în ea sînt analitice; ea rămîne deci valabilă *pentru orice s complex*.

Relația (55) este relația funcțională a lui Riemann.

37. Zerourile lui $\zeta(s)$. Din (55) se vede îndată că $\zeta(-2m)=0$, oricare ar fi întregul pozitiv m.

Într-adevăr, dacă în această relație facem $s=1+2m$, $\zeta(s)$ ca și $\Gamma(s)$ iau valori finite, iar $\cos\frac{\pi s}{2}$ se anulează.

Se vede totodată că, pentru $\sigma>1$, membrul al doilea neanulîndu-se decît în aceste puncte, în $\sigma<0$, funcția $\zeta(s)$ nu mai are alte zerouri decît cele de mai sus.

Pe de altă parte, din (49) rezultă că $\zeta(s)$ nu are nici un zero în $\sigma>1$. Toate celelalte zerouri ale lui $\zeta(s)$ sînt deci cuprinse în banda $0\leqslant\sigma\leqslant 1$.

B. Riemann a formulat ipoteza că toate zerourile nebanale (adică altele decît $s=-2m$) sînt așezate pe dreapta $\sigma=\frac{1}{2}$ și sînt deci de forma $\frac{1}{2}+it$. Această ipoteză a lui B. Riemann, deși foarte probabil adevărată, nu a putut fi încă demonstrată. Unul din progresele cele mai impor-

tante, realizate pînă azi în această direcție, este un rezultat al lui Hardy: pe dreapta $\sigma = \frac{1}{2}$ există o infinitate de zerouri ale lui $\zeta(s)$. Pe de altă parte, s-a demonstrat mai demult că pe dreptele $\sigma = 0$ și $\sigma = 1$ nu există zerouri ale lui $\zeta(s)$.

38. Să mai semnalăm că, pentru studiul lui $\zeta(s)$, B. Riemann a mai introdus o funcție $\xi(s)$ definită prin

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \pi^{-\frac{s}{2}}.$$

Se demonstrează, cu ajutorul relației (15), că $\xi(s)$ este funcție întreagă.

CAPITOLUL VII

FUNCȚII MEROMORFE PERIODICE

I. FUNCȚII DUBLU PERIODICE

1. O clasă importantă de funcții meromorfe o constituie funcțiile periodice. O funcție $f(z)$ admite perioada ω dacă pentru orice z avem

$$f(z + \omega) = f(z). \tag{1}$$

Dacă $f(z)$ admite perioada ω, ea admite neapărat și perioada $m\omega$, oricare ar fi întregul m, deoarece aplicînd lui $f(z + \omega)$ relația (1), se obține

$$f(z + 2\omega) = f(z + \omega) = f(z)$$

și repetînd aceeași operație de m ori,

$$f(z + m\omega) = f(z).$$

Tot astfel, dacă $f(z)$ admite cele două perioade ω_1 și ω_2, adică dacă avem relațiile

$$f(z + \omega_1) = f(z),\ f(z + \omega_2) = f(z),$$

ea admite ca perioadă orice $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, unde m și n sînt întregi arbitrari.

În general, faptul că o funcție admite un număr oarecare de perioade date atrage după sine faptul că *funcția admite ca perioadă toate cantitățile reprezentate prin punctele rețelei care este generată de baza de perioade date.*

După cele ce am văzut în capitolul precedent (teorema lui Jacobi), nu pot deci exista funcții meromorfe avînd ca perioade mai mult de *două* cantități liniar independente.

Vom avea deci de cercetat două clase de funcții meromorfe periodice: funcțiile dublu periodice și funcțiile simplu periodice.

2. Funcții meromorfe dublu periodice s-au prezentat pentru prima oară în analiza matematică cu ocazia calculului lungimii arcului de elipsă. Pentru acest motiv, ele au păstrat și numele de funcții *eliptice.*

Teoria generală a funcțiilor dublu periodice pe care o vom da aici se bazează în întregime pe cele trei funcții σ, ζ și $\wp$ introduse de K. Weierstrass și cercetate în capitolul precedent. Dintre ele, $\wp(z)$ este chiar funcție dublu periodică.

Oricare rețea dublă, formată de vîrfurile unor paralelograme (adică generată de două cantități liniar independente care sînt în raport nereal), dă naștere unei clase de funcții dublu periodice și unor funcții σ, ζ și $\wp$ bine determinate. După cum vom vedea, fiecare din aceste trei funcții dă loc la o reprezentare a tuturor funcțiilor clasei.

3. Proprietăți generale ale funcțiilor dublu periodice. După însăși definiția funcțiilor dublu periodice, este suficient să cunoaștem o astfel de funcție $f(z)$ într-un paralelogram de perioade, pentru a o cunoaște în tot planul. Paralelogramul acesta de perioade poate fi luat oriunde în plan; mai precis, unul din vîrfurile sale poate fi luat într-un punct arbitrar din plan, poziția paralelogramului fiind atunci perfect determinată, deoarece laturile sale (perioadele) sînt date în lungime și direcție.

Rezultă de aici că putem lua întotdeauna acest paralelogram astfel încît, pe conturul său, să nu se afle nici un pol, sau nici un zero, sau, în general, nici unul din punctele în care funcția ia o valoare dată oarecare, deoarece punctele care satisfac una oarecare dintre aceste condiții sînt izolate. Vom alege deci, ori de cîte ori va fi nevoie, paralelogramul acesta (paralelogramul *fundamental*) astfel ca, pe conturul lui, să nu se afle anumite din aceste puncte. Cînd această alegere specială nu este necesară, vom presupune întodeauna că paralelogramul fundamental a fost ales astfel încît unul din vîrfurile sale să fie în originea planului.

Se vede îndată că numărul polilor dintr-un același paralelogram de perioade (după cele observate mai sus putem presupune că ele sînt toate în *interiorul* paralelogramelor) este independent de paralelogramul ales. Acest număr în care fiecare pol este socotit cu ordinul său de multiplicitate se numește *gradul* (sau *ordinul*) funcției dublu periodice $f(z)$.

Nu există funcții dublu periodice de grad zero, cu alte cuvinte, nu există funcții întregi dublu periodice.

Aceasta rezultă îndată din faptul că asemenea funcții, trebuind să fie olomorfe (și deci continue) în paralelogramul fundamental P, ar trebui să fie mărginite în P și deci în tot planul (z). Or, aceasta contrazice teorema lui Liouville.

4. Presupunînd paralelogramul fundamental ales astfel ca pe conturul lui să nu se afle nici un pol, putem enunța următoarea proprietate generală a funcțiilor dublu periodice.

Suma reziduurilor polilor din interiorul unui paralelogram de perioade este nulă:

După teorema lui Cauchy, suma reziduurilor relative la polii b_k din interiorul conturului paralelogramului (contur pe care $f(z)$ este olomorfă) este egală cu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi} f(z)\,dz,$$

π fiind conturul lui P. Or, avem (fig. 23)

$$\int_{\pi} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_0+\omega_1} f(z)\,dz + \int_{z_0+\omega_1}^{z_0+\omega_1+\omega_2} f(z)\,dz + \int_{z_0+\omega_1+\omega_2}^{z_0+\omega_2} f(z)\,dz + \int_{z_0+\omega_2}^{z_0} f(z)\,dz.$$

Din cauza periodicității lui $f(z)$ pentru ω_1 și pentru ω_2, primele două integrale din membrul al doilea au suma lor nulă și tot astfel cele două din urmă, de unde rezultă propoziția enunțată.

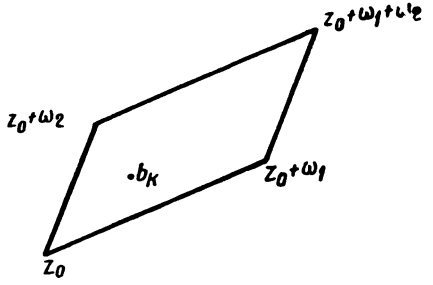


Fig. 23

Se poate conchide îndată de aici că:

Nu există funcții dublu periodice de gradul 1, deoarece reziduul unic ar trebui să fie nul și deci funcția fără poli.

Rezultă că orice funcție meromorfă dublu periodică este cel puțin de gradul 2.

Funcția $\mathfrak{p}(z)$ definită mai sus este efectiv de gradul 2; ea posedă în fiecare paralelogram de perioade cîte un pol de ordinul 2.

5. Este evident că dacă $f(z)$ este dublu periodică cu perioadele ω_1, ω_2, derivata lui $f(z)$ este și ea dublu periodică cu aceleași perioade. Polii lui $f'(z)$ sînt de ordine de multiplicitate mai mari decît ale lui $f(z)$, ele ocupînd însă aceeași poziție în plan.

Fie A un număr complex oarecare.

Funcția

$$\frac{f'(z)}{f(z)-A}$$

este dublu periodică cu perioadele ω_1 și ω_2, ca și $f(z)$. Deci, pentru aceleași motive ca și în paragraful precedent,

$$\int_{\pi} \frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz = 0,$$

în care P a fost ales astfel ca pe π să nu fie nici un punct în care $f(z) - A = 0$ și nici un pol al lui $f(z)$.

Aceasta înseamnă însă că variația lui $\ln[f(z) - A]$, cînd z descrie π, este nulă, adică variația $\arg[f(z) - A] = 0$.

După teorema variației argumentului (cap. II, § 23), numărul zerourilor lui $f(z) - A$ cuprinse în P este deci egal cu numărul polilor săi în P, care este evident același cu al polilor lui $f(z)$, deci al gradului lui $f(z)$. Deci:

Oricare ar fi cantitatea complexă A, numărul zerourilor lui $f(z) - A$ în fiecare paralelogram de perioade este egal cu gradul lui $f(z)$.*

---

* În cazul cînd pe conturul unui astfel de paralelogram s-ar afla zerouri ale lui $f(z) - A$, numai cîte unul din două zerouri ce diferă printr-o perioadă trebuie socotit ca făcînd parte din P. Cu alte cuvinte, P trebuie privit ca format din interiorul său, plus două din laturile sale adiacente, mai puțin extremitățile lor necomune.

Să observăm că A poate fi și ∞, dacă convenim să luăm atunci drept zerouri ale lui $f(z)$ — A polii lui $f(z)$. Această proprietate justifică, așadar, pe deplin denumirea de *grad*, dată mai sus numărului polilor dintr-un paralelogram de perioade.

6. În sfîrșit, să mai dăm o proprietate generală importantă a funcțiilor dublu periodice, care leagă între ele toate funcțiile care corespund aceluiași sistem de perioade. Astfel:

Între două funcții meromorfe dublu periodice $f_1(z)$ și $f_2(z)$ care corespund aceluiași sistem de perioade, există întotdeauna o relație algebrică.

Fie λ_k ordinul polului b_k al funcției $f_1(z)$ sau $f_2(z)$; dacă b_k este pol al ambelor funcții f_1 și f_2, atunci λ_k este ordinul cel mai mare al acestor poli.

Să luăm polinomul general de gradul m în două variabile independente u și v, fie $P(u,v)$ și considerăm funcția meromorfă

$$P[f_1(z), f_2(z)].$$

Funcția este evident dublu periodică, cu perioadele ω_1, ω_2 ale lui f_1 și f_2. Dacă putem alege coeficienții lui $P(u, v)$ astfel ca, fără ca ei să fie toți nuli, funcția de mai sus să nu mai posede poli, vom avea, după propoziția din § 3, în mod identic

$$P(f_1, f_2) = \text{const.}, \tag{2}$$

adică o relație algebrică între f_1 și f_2.

Relațiile pe care va trebui să le scriem pentru a satisface această condiție sînt toate liniare și omogene în acești coeficienți, termenul liber din $P(u,v)$ neintervenind în ele. Or, numărul coeficienților lui $P(u, v)$, dacă nu socotim acest termen, este de $\frac{m(m+3)}{2}$, iar numărul de relații omogene pe care le vom avea de satisfăcut este de $m\lambda_k$ pentru fiecare pol b_k, deci în total de $m\sum_k \lambda_k$. Așadar, dacă

$$\frac{m(m+3)}{2} > m \sum_k \lambda_k,$$

adică dacă m satisface inegalitatea

$$m > 2 \sum_k \lambda_k - 3, \tag{3}$$

vom avea întodeauna posibilitatea de a alege coeficienții astfel ca, fără ca ei să fie toți nuli, relațiile să fie satisfăcute și deci să avem (2). Ajunge deci să luăm pe m destul de mare pentru ca (3) să fie satisfăcută.

Din cele de mai sus rezultă, în particular, că între orice funcție $f(z)$ dublu periodică și derivata ei $f'(z)$ există o relație algebrică. Astfel, orice funcție meromorfă dublu periodică satisface o ecuație diferențială algebrică de ordinul I.

7. **Aplicații la funcția $\mathfrak{p}(z)$.** Ecuația diferențială a funcției $\mathfrak{p}(z)$ definită în capitolul precedent este

$$[\mathfrak{p}'(z)]^2 - 4\mathfrak{p}^3(z) + g_2\mathfrak{p}(z) + g_3 = 0, \tag{4}$$

în care am pus

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6} \tag{5}$$

cu notațiile din acel capitol.

Cantitățile g_2 și g_3 se numesc *invarianții* lui $\mathfrak{p}(z)$. Ele rămîn neschimbate dacă înlocuim perechea ω_1, ω_2 printr-o altă bază a aceleiași rețele, adică g_2 și g_3 nu depind decît de rețeaua $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ și necidecum de baza aleasă*.

Relația (4), ca și relațiile (5) se obțin aplicînd funcțiilor $\mathfrak{p}(z)$ și $\mathfrak{p}'(z)$ operațiile indicate în paragraful precedent.

Cititorul le va dezvolta singur.

II. EXPRESIILE FUNCȚIILOR DUBLU PERIODICE CU AJUTORUL FUNCȚIILOR σ, ζ ȘI $\mathfrak{p}$

8. Este necesar să dăm mai întîi o teoremă care se aplică tuturor funcțiilor meromorfe într-un domeniu, dar care este interesantă mai ales în cazul funcțiilor dublu periodice pe care le considerăm aici.

Fie D un domeniu jordanian limitat de curba C și $f(z)$ o funcție meromorfă în D și olomorfă și $\neq 0$ pe C. Vom calcula integrala

$$\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Teorema generală a lui C a u c h y (cap. III, § 37) reduce calculul acestei integrale la acela al reziduurilor punctelor singulare ale funcției $z\frac{f'(z)}{f(z)}$, cuprinse în D, și anume aici (pentru că $\frac{f'(z)}{f(z)}$, ca și $f(z)$, este meromorfă în D) ale *polilor*. Or, polii lui $\frac{f'(z)}{f(z)}$ sînt, pe de o parte, zerourile a ale lui $f(z)$, pe de altă parte, polii b tot ai lui $f(z)$.

Să examinăm ce se întîmplă în fiecare din aceste două cazuri.

În jurul zeroului a, funcția se scrie

$$f(z) = c_\mu(z-a)^\mu + c_{\mu+1}(z-a)^{\mu+1} + \dots,$$

* Vom vedea în capitolul XI, cînd vom studia integralele eliptice, că g_2 și g_3 pot fi dați *a priori*, cu singura condiție ca polinomul $4u^3 - g_2u - g_3$ să aibă rădăcinile **sale distincte**.

cu $c_\mu \neq 0$, unde μ este ordinul zeroului. Deci, în vecinătatea lui a, avem

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = (z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} + a\frac{f'(z)}{f(z)} =$$

$$= \left[1 + \frac{a}{z-a}\right]\left[\frac{\mu c_\mu (z-a)^\mu + (\mu+1)\, c_{\mu+1}(z-a)^{\mu+1} + \dots}{c_\mu (z-a)^\mu + c_{\mu+1}(z-a)^{\mu+1} + \dots}\right] = \tag{6}$$

$$= \left[1 + \frac{a}{z-a}\right]\left[\frac{\mu c_\mu + (\mu+1)\, c_{\mu+1}(z-a) + \dots}{c_\mu + c_{\mu+1}(z-a) + \dots}\right].$$

Cum $c_\mu \neq 0$, paranteza în vecinătatea lui $z = a$ este olomorfă și diferită de zero. Avem deci

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \left[1 + \frac{a}{z-a}\right][d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \dots], \tag{7}$$

cu $d_0 \neq 0$. Făcînd însă $z = a$ în paranteza ultimă din (6), se vede că $d_0 = \mu$.

Din (7) se deduce atunci îndată că reziduul lui $z = a$ este *egal cu* μa, adică a înmulțit cu ordinul său de multiplicitate [ca zero al lui $f(z)$].

Pentru cazul polului $z = b$, raționamentul este cu totul analog. În loc de (6) vom avea în vecinătatea lui b

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \left[1 + \frac{b}{z-b}\right]\left[\frac{-\nu c_{-\nu} - (\nu-1)\, c_{-\nu+1}(z-b) - \dots}{c_{-\nu} + c_{-\nu+1}(z-b) + \dots}\right],$$

unde ν este ordinul polului b al lui $f(z)$, deci $c_{-\nu} \neq 0$.

Paranteza ultimă din dreapta se mai scrie

$$d_0 + d_1(z-b) + d_2(z-b)^2 + \dots,$$

cu $d_0 = \nu \neq 0 \dots$

Deci, reziduul lui $z = b$ este egal cu $-\nu b$, adică b înmulțit cu ordinul său [ca pol al lui $f(z)$] și înmulțit cu -1.

Prin urmare, avem, după teorema reamintită,

$$\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\,[a_1 + a_2 + \dots + a_p - b_1 - b_2 - \dots - b_q], \tag{8}$$

unde a_k $(k = 1,2,\dots,p)$ sînt zerourile și b_k $(k = 1,2,\dots,q)$ polii lui $f(z)$ cuprinși în D. În (8), fiecare pol sau zero trebuie scris de atîtea ori cît indică ordinul său de multiplicitate ca pol sau zero al lui $f(z)$.

9. Să aplicăm acum — și să precizăm — formula (8) în cazul *cînd* $f(z)$ *este dublu periodică*, iar D este un paralelogram P de perioade. Alegem acest paralelogram astfel încît pe π (periferia lui P) să nu se afle nici un zero și nici un pol al lui $f(z)$, și deci (8) să poată fi aplicat.

Vom avea evident aici

$$\int_{\pi} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\int_{z_0}^{z_0+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz+\int_{z_0+\omega_1}^{z_0+\omega_1+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz+$$

$$+\int_{z_0+\omega_1+\omega_2}^{z_0+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz+\int_{z_0+\omega_2}^{z_0} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

integralele fiind luate pe drumul direct în sensurile arătate. În integrala a doua să facem schimbarea de variabilă $z=u+\omega_1$, iar în cea de-a treia schimbarea $z=u+\omega_2$. Cum $f(u+\omega_1)=f(u)$ și $f(u+\omega_2)=f(u)$, avem (dacă înlocuim sub toate semnele $\int$ pe u cu z)

$$\int_{\pi} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\omega_1\int_0^{\omega_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz+\omega_2\int_{\omega_1}^{0}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=$$

$$=\omega_1\left[\ln f(z)\right]_0^{\omega_2}+\omega_2\left[\ln f(z)\right]_{\omega_1}^{0}.$$

Or, cînd z trece de la 0 la ω_2 (sau de la ω_1 la 0), $f(z)$ revine la valoarea inițială. Deci, variațiile logaritmilor sînt multipli întregi de $2\pi i$.

Prin urmare, în cazul nostru, avem

$$\int_{\pi} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=2\pi i\,[M\omega_1+N\omega_2], \tag{9}$$

cu M și N întregi.

Putem deci formula teorema următoare care rezultă din (8) în cazul lui $f(z)$ dublu periodic:

Diferența dintre suma zerourilor și suma polilor din același paralelogram de perioade este întotdeauna egală cu o perioadă (fiecare zero și fiecare pol fiind socotit, în sumă, de atîtea ori cît indică ordinul său).

Într-adevăr, din (8) și (9) rezultă, prin comparație,

$$a_1+a_2+\ldots+a_p-b_1-b_2-\ldots b_q=M\omega_1+N\omega_2=\omega. \tag{10}$$

Cum M și N sînt întregi, $\omega=M\omega_1+N\omega_2$ este perioadă. Avem aici $q=p=$ ordinul funcției dublu periodice.

10. Sistem complet de zerouri și poli. Se numește astfel un sistem format de zerouri și poli care satisface următoarele două condiții:

1° Nu există două zerouri sau doi poli distincți, în sistem, care să difere între ei printr-o perioadă.

2° Orice zero (sau pol) care nu face parte din sistem diferă de un zero (sau pol) al sistemului printr-o perioadă.

Este clar că zerourile și polii dintr-un paralelogram de perioade formează, în particular, un sistem complet.

Se observă îndată că, dintr-un sistem complet dat, se poate obține altul, înlocuind un zero (sau un pol) cu un zero (sau un pol) congruent lui în raport cu ω_1 și ω_2 (adică diferind printr-o perioadă de el). În modul acesta, după (10), putem obține întotdeauna sisteme complete astfel ca suma zerourilor lor să fie egală cu suma polilor lor. Să le numim sisteme *nule*.

11. Expresia funcțiilor dublu periodice cu ajutorul lui σ. Fie $f(z)$ o funcție meromorfă dublu periodică, cu perioadele ω_1 și ω_2 și fie $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ un sistem *complet și nul* de zerouri și poli ai ei. Să considerăm funcția

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\ldots\sigma(z-b_p)}*. \tag{11}$$

Această funcție, fiind un cît de două funcții întregi, este meromorfă.

Avem, după cele ce am văzut relativ la transformarea lui $\sigma(z)$ prin adăugarea unei perioade,

$$\varphi(z+\omega) = \frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)\,e^{2p\eta z+p\eta\omega-2\eta(a_1+\ldots+a_p)}}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\ldots\sigma(z-b_p)e^{2p\eta z+p\eta\omega-2\eta(b_1+\ldots+b_p)}}.$$

Or, $a_1+\ldots+a_p = b_1+\ldots+b_p$, deoarece sistemul este ales nul.

Deci,

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z). \tag{12}$$

Prin urmare, $\varphi(z)$, definit prin (11), care este funcție meromorfă, este și dublu periodică, avînd aceleași perioade ca și $f(z)$.

Funcția

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \tag{13}$$

este tot dublu periodică.

Cum însă (11) arată că zerourile lui $\varphi(z)$ și polii săi sînt tocmai zerourile și polii lui $f(z)$, fiecare cu aceleași ordine de multiplicitate [pentru că $z=\alpha+m\omega_1+n\omega_2$ este zero simplu pentru $\sigma(z-\alpha)$], funcția dublu periodică (13) nu mai are nici un pol și deci este constantă.

Avem deci, C fiind o constantă [care se determină dînd lui z o valoare particulară unde $f(z)$ este olomorfă]

$$f(z) = C\,\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\ldots\sigma(z-b_p)} \tag{14}$$

adică, orice funcție eliptică se poate reprezenta sub forma unui cît de produse a unui număr finit de funcții σ, fiecare σ corespunzînd cîte unui zero (la numărător) sau unui pol (la numitor), după cum se vede în (14).

---

* Funcția $\sigma(z)$ este formată cu perioadele ω_1 și ω_2 ale lui $f(z)$; ea este deci perfect determinată.

12. **Aplicații.** I. Să observăm că (14) permite să construim o funcție meromorfă dublu periodică, cu două perioade ω_1, ω_2 *date*, cu $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ = nereal oarecare (pentru că la orice ω_1, ω_2, cu $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ = nereal, corespunde un $\sigma(z)$ determinat) și cu zerouri și poli, *dați cu ordinele lor de multiplicitate* (acestea trebuie să fie însă astfel ca suma zerourilor minus suma polilor să fie egală cu o perioadă $m\omega_1 + n\omega_2$, pentru a satisface teorema de mai sus).

Deci, acestea sînt singurele condiții pe care trebuie să le îndeplinească zerourile și polii unei funcții dublu periodice oarecare.

II. Să aplicăm (14) la calcularea diferenței $\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v)$, unde $\mathfrak{p}(z)$ este funcția lui Weierstrass, iar u și v, două valori particulare $\neq m\omega_1 + n\omega_2$ ale lui z. În orice astfel de puncte se știe că $\mathfrak{p}(z)$ are valoare finită.

Să luăm pe v fix și să facem pe u să descrie planul (z).

Funcția de u

$$F(u) = \mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v)$$

are aceleași perioade ca $\mathfrak{p}(z)$.

Ca sistem complet de poli și zerouri putem lua v, $-v$, 0 și 0, primele două fiind evident zerouri pentru $F(u)$, iar $u = 0$ fiind pol dublu. Acest sistem este și nul, după cum se constată îndată.

Aplicînd deci formula (14), obținem

$$\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v) = C\,\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)}\,. \tag{15}$$

Pentru a determina pe C, să înmulțim cu u^2 și să facem apoi pe u să tindă către zero.

După expresia lui $\mathfrak{p}(u)$, adică

$$\mathfrak{p}(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,\,n}{}' \left[\frac{1}{(u - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}\right],$$

se vede că

$$\lim_{|u|\to 0} u^2\,\mathfrak{p}(u) = 1.$$

După înmulțirea cu u^2, în stînga limita va fi deci 1. Pe de altă parte, $\lim_{|u|\to 0} \frac{u^2}{\sigma^2(u)} = 1$ și $\sigma(v) = -\sigma(-v)$. Deci,

$$C = -\frac{1}{\sigma^2(v)}\,.$$

Prin urmare, avem în definitiv, oricare ar fi u și $v \neq m\omega_1 + n\omega_2$,

$$\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v) = -\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}\,. \tag{16}$$

Relația este verificată și pentru $u = m\omega_1 + n\omega_2$ dar $v \neq m\omega_1 + n\omega_2$.

Pe de altă parte, relația fiind simetrică, ea este verificată și pentru $v = m\omega_1 + n\omega_2$ și $u \neq m\omega_1 + n\omega_2$.

III. Ca altă aplicație a expresiei (14) și a formulei (16) dedusă din ea, vom da formulele de adunare pentru $\zeta(z)$ și $\wp(z)$. Pentru aceasta, să luăm derivata logaritmică (în raport cu u) a relației (16) *. Obținem

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u + v) + \zeta(u - v) - 2\zeta(u), \tag{17}$$

dacă ne amintim că

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u).$$

Dacă în relația (17) schimbăm între ei pe u și v, avem

$$\frac{-\wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u + v) - \zeta(u - v) - 2\zeta(v) \tag{18}$$

și, adunînd (17) cu (18), obținem *formula de adunare a funcției* $\zeta(z)$

$$\zeta(u + v) = \frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right] + \zeta(u) + \zeta(v). \tag{19}$$

Pentru a găsi formula de adunare a lui $\wp(z)$, vom proceda cu (19) analog cu ceea ce am făcut cu (16).

Amintindu-ne că

$$-\zeta'(u) = \wp(u),$$

vom lua aici derivata (în raport cu u) relației (19). Vom înlocui în ea $\zeta'(u)$ cu $-\wp(u)$ și $\zeta'(v)$ cu $-\wp(v)$, vom schimba apoi între ei pe u și v, ca mai sus, și vom aduna cele două relații obținute. Vom avea:

$$2\wp(u + v) = \wp(u) + \wp(v) + \frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\wp''(u) - \wp''(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right]. \tag{20}$$

Această formulă poate fi însă simplificată, dacă ținem seama de ecuația diferențială pe care o satisface $\wp(u)$ și care este, după cum am spus mai sus,

$$[\wp'(u)]^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3.$$

Ea dă îndată prin derivare

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - \frac{g_2}{2},$$

ceea ce permite eliminarea lui $\wp''(u)$ și $\wp''(v)$ din (20).

* Considerăm aici relația (16) numai pentru u și $v \neq m\omega_1 + n\omega_2$. În acest caz, u și v joacă, după cum am observat, același rol.

Se obține astfel *formula de adunare a lui* $\mathfrak{p}(z)$

$$\mathfrak{p}(u+v) = \frac{1}{4}\left[\frac{\mathfrak{p}'(u) - \mathfrak{p}'(v)}{\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v)}\right]^2 - \mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v). \tag{21}$$

O b s e r v a ț i e. Toate aceste formule de adunare sînt consecințe ale formulei (16).

Este interesant de remarcat analogia acesteia din urmă cu următoarele două formule elementare

$$\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} = -\frac{(u-v)(u+v)}{u^2 v^2}$$

și

$$\frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{\sin^2 v} = -\frac{\sin(u-v)\sin(u+v)}{\sin^2 u \sin^2 v}.$$

De fapt, în teoria funcțiilor dublu periodice, funcția $\mathfrak{p}(z)$ a lui Weierstrass joacă rolul lui $\frac{1}{z^2}$ din teoria funcțiilor raționale și a lui $\frac{1}{\sin^2 z}$ din teoria funcțiilor trigonometrice.

13. Formula lui Hermite. Avem prin definiție

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{z - m\omega_1 - n\omega_2} + \frac{1}{m\omega_1 + n\omega_2} + \frac{z}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}\right] \tag{22}$$

cu notațiile din capitolul precedent.

Să formăm funcția $\zeta(z)$, cu perioadele lui $f(z)$ (funcție meromorfă dublu periodică oarecare dată).

Fie $b_1, b_2, \ldots, b_p$ un sistem complet de poli (de exemplu cei dintr-un anumit paralelogram de perioade).

În jurul polului $z = b_k$ $(k = 1,2, \ldots, p)$, dacă ν_k este ordinul polului b_k, funcția $f(z)$ se dezvoltă după cum urmează

$$f(z) = \frac{B_1^k}{z - b_k} + \frac{B_2^k}{(z-b_k)^2} + \ldots + \frac{B_{\nu_k}^k}{(z-b_k)^{\nu_k}} + H_k(z - b_k), \tag{23}$$

unde B sînt coeficienți depinzînd de polul b_k, iar $H_k(z - b_k)$ este o funcție olomorfă în $z = b_k$, deci o serie întreagă în $z - b_k$.

Să considerăm funcția definită prin

$$F(z) = \sum_{k=1}^{p}\left[B_1^k \zeta(z - b_k) - B_2^k \zeta'(z - b_k) + \frac{B_3^k}{2!}\zeta''(z - b_k) - \ldots\right.$$

$$\left. \ldots (-1)^{\nu_k - 1} \frac{B_{\nu_k}^k}{(\nu_k - 1)!} \zeta^{(\nu_k - 1)}(z - b_k)\right], \tag{24}$$

$\zeta(z)$ fiind formată cu perioadele lui $f(z)$, iar $b_1, b_2, \ldots, b_p$ fiind un sistem complet de poli.

Este clar că $F(z)$ are toți polii lui $f(z)$ (cu aceleași ordine de multiplicitate) și *numai acești poli.*

Dacă în (24) înlocuim pe $\zeta', \zeta'', \ldots, \zeta^{\nu_k - 1}$ cu expresiile acestor derivate deduse din (22) și orînduim apoi suma din (24) după puterile negative ale lui $z - b_k$, se vede îndată, ținînd seama de (23), că în jurul polului, b_k, $F(z)$ și $f(z)$ au, în dezvoltările lor Laurent, aceleași părți principale.

Deci $F(z) - f(z)$ este fără poli.

Dar $F(z)$ este și funcție dublu periodică ca și $f(z)$. Într-adevăr, lucrul este evident pentru ceea ce în suma $\sum_{k=1}^{p}$ din (24) cuprinde derivatele lui ζ, deoarece aceste derivate sînt egale cu $-\wp(z-b_k)$, $-\wp'(z-b_k)$, $-\wp''(z-b_k), \ldots$, care sînt ca și $\wp(z-b_k)$ toate periodice de ω_1 și ω_2. Rămîne de examinat suma

$$\sum_{k=1}^{p} B_1^k \zeta(z-b_k) \tag{25}$$

din (24).

Dacă adăugăm ω (care poate fi ω_1 sau ω_2) la z, știm că $\zeta(z-b_k)$ devine $\zeta(z-b_k) + 2\eta$; deci (25) crește cu

$$2\eta \sum_{k=1}^{p} B_1^k .$$

Or, B_1^k este reziduul relativ la b_k al funcției $f(z)$, după cum se vede în (23).

Cum $f(z)$ este funcție dublu periodică, suma acestor reziduuri este nulă astfel încît $F(z)$ este și ea periodică de ω_1 și ω_2.

Dar atunci, $F(z) - f(z)$ este și ea periodică de ω_1 și ω_2. Cum nu are poli, ea este o constantă.

Deci, avem pentru $f(z)$ expresia

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^{p} \Big[B_1^k \zeta(z-b_k) - B_2^k \zeta'(z-b_k) + \frac{B_3^k}{2!} \zeta''(z-b_k) - \ldots \\ \ldots (-1)^{\nu_k - 1} \frac{B_{\nu_k}^k}{(\nu_k - 1)!} \zeta^{(\nu_k - 1)}(z-b_k) \Big]. \tag{26}$$

Constanta C se determină, ca și mai sus, dînd lui z o valoare particulară într-un punct unde $f(z)$ este olomorfă.

Formula (26) se datorește lui Charles Hermite. Ea dă loc la aplicații importante :

1° *Integrarea funcțiilor eliptice.* Din (26) se vede îndată că *orice funcție eliptică se poate integra cu ajutorul funcțiilor* $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ *și* $\wp(z)$ *și a derivatelor acesteia din urmă.*

Într-adevăr, ajunge, privind (26), să ne amintim că avem

$$\frac{d}{dz}[\log \sigma(z)] = \zeta(z)$$

și

$$\frac{d}{dz}[\zeta(z)] = -\wp(z).$$

Se vede îndată că pentru ca integrala unei funcții eliptice $f(z)$ să fie uniformă, trebuie să lipsească termenii de forma $B_1^k\,\zeta(z-b_k)$, adică nici un pol să nu fie simplu.

Condiția este evident suficientă, deoarece integralele celorlalți termeni sînt funcții uniforme.

Pentru ca integrala să fie și ea funcție dublu periodică, trebuie

1) să fie uniformă, deci $B_1^k = 0$, pentru $k = 1, 2, \ldots, p$, și

2) să fie dublu periodică de ω_1 și ω_2.

Or, singurii termeni care prin întegrare dau funcții neperiodice de ω_1 și ω_2 sînt acum cei de forma $B_2^k\,\zeta'(z-b_k)$, precum și termenul C.

Pentru ca $f(z)$ să aibă integrala sa tot funcție periodică de ω_1 și ω_2, trebuie (și este suficient), prin urmare, ca

1) să avem $B_1^k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$;

2) să avem simultan

$$\begin{aligned} C\omega_1 + 2\eta_1 \sum_{k=1}^{p} B_2^k &= 0 \\ C\omega_2 + 2\eta_2 \sum_{k=1}^{p} B_2^k &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Determinantul sistemului acestuia de ecuații omogene în C și $\sum_{k=1}^{p} B_2^k = S$ este $2\eta_2\omega_1 - 2\eta_1\omega_2$.

Această valoare se poate obține calculînd integrala $\int_\pi \zeta(z)\,dz$, unde π este periferia paralelogramului de perioade cu centrul în $z = 0$.

Se obține astfel

$$\eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2 = \pm \pi i,$$

(semnele + sau — corespunzînd celor două posibilități referitoare la semnul unghiului format de vectorii ω_1 și ω_2*). Cum determinantul este în orice caz $\neq 0$, sistemul dă ca o condiție pentru C și S relațiile $C = S = 0$.

---

* Se va putea face calculul acesta ca exercițiu. Se va ține seama de teorema reziduurilor și de formula de transformare a lui $\zeta(z)$, cînd se adaugă lui z o perioadă.

Deci, în rezumat, pentru ca integrala lui (26) să fie tot funcție dublu periodică, cu perioadele ω_1 și ω_2, ca și $f(z)$, este necesar și suficient ca

$$B_1^k = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, p), \ C = 0, \ \sum_{k=1}^{p} B_2^k = 0.$$

2° *Expresia oricărei funcții dublu periodice ca funcție rațională de* $\mathfrak{p}(z)$ *și* $\mathfrak{p}'(z)$. O altă aplicație și mai importantă a formulei lui Hermite duce la consecința că *orice funcție dublu periodică este de forma*

$$f(z) = R[\mathfrak{p}(z), \mathfrak{p}'(z)],$$

unde R *este rațional de* $\mathfrak{p}$ *și* $\mathfrak{p}'$, *funcția* $\mathfrak{p}$ (z) *fiind construită cu sistemul de perioade al lui* $f(z)$.

În formula lui Hermite să înlocuim

$$\zeta(z - b_k), \ \zeta'(z - b_k), \ \zeta''(z - b_k), \ldots$$

prin formula de adunare ce dă pe $\zeta(u + v)$ și derivatele ei $\zeta'(u + v)$, $\zeta''(u + v), \ldots$

Vom avea*

$$\zeta(z - b_k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{p}'(z) + \mathfrak{p}'(b_k)}{\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(b_k)}\right] + \zeta(z) - \zeta(b_k)$$

și se vede prin derivare că $\zeta'(z - b_k)$, $\zeta''(z - b_k), \ldots$ vor deveni funcții raționale

$$R(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}'', \ldots)$$

de $\mathfrak{p}(z)$ și de derivatele lui succesive.

Expresia lui $f(z)$ va deveni deci de forma

$$f(z) = \zeta(z) \sum_{k=1}^{p} B_1^k + R[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}'' \ldots].$$

Dar $\sum_{k=1}^{p} B_1^k = 0$, deoarece suma reziduurilor polilor dintr-un paralelogram de perioade este nulă (a se vedea proprietățile generale ale funcțiilor dublu periodice). Deci

$$f(z) = R[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}'', \ldots]. \tag{28}$$

Dar cum avem

$$(\mathfrak{p}')^2 = 4\mathfrak{p}^3 - g_2\mathfrak{p} - g_3, \tag{29}$$

toate derivatele $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}'''$, ... se exprimă rațional (prin derivarea acestei ecuații diferențiale) în funcție de $\mathfrak{p}(z)$ și $\mathfrak{p}'(z)$.

---

* Presupunînd că printre b_k [polii lui $f(z)$] *nu* sînt cantitățile $m\omega_1 + n\omega_2$, pentru ca $\mathfrak{p}(b_k)$ și $\zeta(b_k)$ să fie finiți. Dacă nu este așa, vom considera funcția $\frac{1}{f(z)}$.

Substituind în (28), obținem o relație de forma

$$f(z) = R[\mathfrak{p}(z), \mathfrak{p}'(z)], \tag{30}$$

adică ceea ce era de demonstrat.

O b s e r v a ț i e. Cum $\mathfrak{p}(z)$ satisface relația (29), se vede că din (30) se pot elimina toate puterile > 1 ale lui $\mathfrak{p}'(z)$. Deci (30) se poate scrie sub forma

$$f(z) = \frac{R_1 + \mathfrak{p}'(z) R_2}{R_3 + \mathfrak{p}'(z) R_4},$$

unde R_1, R_2, R_3, R_4 sînt funcții raționale întregi numai de $\mathfrak{p}(z)$. Din această expresie a lui $f(z)$ se deduce îndată că *dacă* $f(z)$ *este funcție pară*, trebuie să avem

$$R_1 - R_3 f(z) = 0,$$

pentru orice valoare a lui z, adică în acest caz $f(z)$ *se exprimă ca funcție rațională de* $\mathfrak{p}(z)$.

III. FUNCȚIA $\mathfrak{p}(z)$ ȘI RELAȚIILE EI CU ALTE FUNCȚII CARE STAU LA BAZA TEORIEI FUNCȚIILOR DUBLU PERIODICE

14. Din ultimul rezultat al secțiunii precedente se vede că studiul funcțiilor dublu periodice se poate reduce la acela al funcției $\mathfrak{p}(z)$. Aceasta ne conduce, pe de o parte, la cercetarea mai îndeaproape a acestei funcții, iar pe de altă parte, la introducerea altor funcții, înrudite cu $\mathfrak{p}(z)$, care, în unele cazuri, o pot înlocui în mod avantajos.

Funcția $\mathfrak{p}(z)$ este perfect determinată printr-o bază (ω_1, ω_2) a sistemului său de perioade $\{\omega\}$.

Aceste perioade determină și invarianții g_2 și g_3 ai lui $\mathfrak{p}(z)$ (§ 7) și deci rădăcinile e_1, e_2, e_3 ale polinomului

$$4\mathfrak{p}^3 - g_2\mathfrak{p} - g_3, \tag{31}$$

care figurează în ecuația diferențială a lui $\mathfrak{p}(z)$ (§ 7). Să notăm

$$\frac{\omega_1}{2} = \alpha_1, \quad \frac{\omega_2}{2} = \alpha_2, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \alpha_3.$$

Cantitățile acestea sînt zerouri ale funcției $\mathfrak{p}'(z)$. Într-adevăr, avem, $\mathfrak{p}'(z)$ fiind impară,

$$\mathfrak{p}'(\alpha_k) = -\mathfrak{p}'(-\alpha_k) \quad (k = 1, 2, 3),$$

și cum pe de altă parte, α_k diferă de $-\alpha_k$ printr-o perioadă,

$$\mathfrak{p}'(\alpha_k) = \mathfrak{p}'(-\alpha_k),$$

deci $\mathfrak{p}'(\alpha_k) = 0$.

Toate cantitățile α_k se află în același paralelogram de perioade, și anume în paralelogramul cu vîrful în $z = 0$ (dacă ținem seama de nota din § 5, p. 178). Or,

$\mathfrak{p}'(z)$ este de gradul 3; $\alpha_k\,(k = 1, 2, 3)$ sînt deci singurele zerouri din acest paralelogram, iar celelalte zerouri se obțin adăugînd o perioadă $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ arbitrară unui α_k.

Ecuația diferențială a lui $\mathfrak{p}(z)$

$$[\mathfrak{p}'(z)]^2 = 4\mathfrak{p}^3(z) - g_2\,\mathfrak{p}(z) - g_3 \tag{32}$$

arată că $\mathfrak{p}(\alpha_k)$ este rădăcină a polinomului (31).

Pe de altă parte, nu putem avea

$$\mathfrak{p}(\alpha_k) = \mathfrak{p}(\alpha_{k'}),$$

pentru $k \neq k'$.

Fie într-adevăr e_1 valoarea comună a acestor două cantități.

Ecuația

$$\mathfrak{p}(z) - e_1 = 0 \tag{33}$$

are în $z = \alpha_k$ o rădăcină dublă, deoarece $\mathfrak{p}'(\alpha_k) = 0$ și tot astfel în $z = \alpha_{k'}$. Or, α_k și $\alpha_{k'}$ sînt în același paralelogram de perioade și (33) nu poate avea decît două rădăcini într-un asemenea paralelogram, $\mathfrak{p}(z)$ fiind de gradul 2.

Deci, $\mathfrak{p}(\alpha_k) \neq \mathfrak{p}(\alpha_{k'})$ și $\mathfrak{p}(\alpha_1)$, $\mathfrak{p}(\alpha_2)$, $\mathfrak{p}(\alpha_3)$ reprezintă toate rădăcinile lui (31) (care sînt deci neapărat *distincte*). Avem deci,

$$e_k = \mathfrak{p}(\alpha_k) \quad (k = 1, 2, 3). \tag{34}$$

Relațiile (34) dau, prin urmare, e_1, e_2, e_3 în funcție de ω_1 și ω_2, tot după cum relațiile (5) din § 7 dau pe g_2 și g_3.

15. Să considerăm acum cazul cînd funcția $\mathfrak{p}(z)$ are o perioadă ω_1 reală și o perioadă ω_2 pur imaginară.

Expresia lui $\mathfrak{p}(z)$

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right]$$

arată îndată că $(z)\,\mathfrak{p}$ este, în acest caz, reală, adică, pentru valori reale ale lui z, $\mathfrak{p}(z)$ ia valori reale.

Într-adevăr, oricare ar fi z real, expresia de sub semnul Σ este atunci formată din perechi de termeni imaginar conjugați.

Se vede de asemenea că, pentru z pur imaginar, $\mathfrak{p}(z)$ este încă real.

Rezultă de aici că $e_1 = \mathfrak{p}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$ și $e_2 = \mathfrak{p}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$ sînt reali. Dar expresiile (5) din § 7 arată că dacă ω_1 este real, iar ω_2 pur imaginar, g_2 și g_3 sînt reali.

Polinomul (31) are deci coeficienții săi reali și cum două din rădăcinile sale (e_1 și e_2) sînt reale, și e_3 este real.

Pe axa reală, $\mathfrak{p}'(x)$ nu are decît un zero pe intervalul $(0, \omega_1)$, și anume în $x = \frac{\omega_1}{2}$.

Cînd x crește de la 0 la $\frac{\omega_1}{2}$, $s = \mathfrak{p}(x)$ descrește de la $+\infty$ la $\mathfrak{p}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, unde își atinge minimul, iar de aici, crește din nou pînă la $+\infty$, cînd x crește de la $\frac{\omega_1}{2}$ la ω_1.

Deci, nici e_2 nici e_3 nu pot fi $\geqslant e_1$ *.

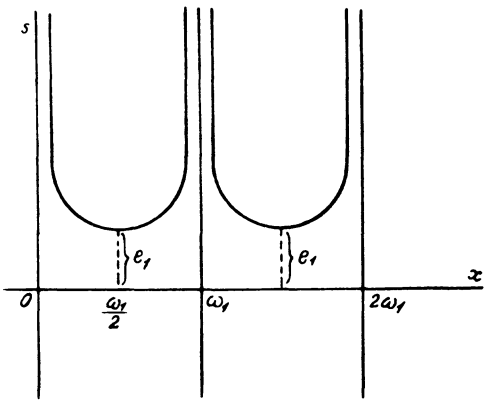


Fig. 24

Dar din $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, se vede că cea mai mare dintre rădăcinile lui (31) trebuie să fie > 0. Deci, $\mathfrak{p}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1 > 0$, iar curba $s = \mathfrak{p}(x)$ are forma din figura 24 alăturată, repetîndu-se în toate intervalele $[m\omega_1, (m+1)\omega_1]$ cu m întreg arbitrar.

Asemănarea acestei curbe cu aceea care reprezintă pe $s = \frac{1}{\sin^2 x}$ este vizibilă; ceea ce era de așteptat, dat fiind rolul pe care $\mathfrak{p}(z)$ îl joacă în teoria funcțiilor dublu periodice.

16. Funcțiile $\sigma_k(z)$. Să revenim acum la $\mathfrak{p}(z)$, cu perioadele ω_1, ω_2 oarecare.

Dacă aplicăm lui

$$\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(\alpha_k)$$

formula (16) din § 12, care ne-a servit la stabilirea formulelor de adunare pentru ζ și $\mathfrak{p}$, obținem

$$\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(\alpha_k) = -\frac{\sigma(z+\alpha_k)\,\sigma(z-\alpha_k)}{[\sigma(z)]^2\,[\sigma(\alpha_k)]^2}.$$

Să scriem, pentru simetria notațiilor, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

Deoarece $2\alpha_k = \omega_k$ $(k = 1, 2, 3)$ și pentru că ω_k sînt perioade, avem ținînd seamă de transformarea funcției $\sigma(z)$ prin adăugarea la z a unei perioade,

$$\sigma(z+\alpha_k) = \sigma(z - \alpha_k + \omega_k) = -\sigma(z-\alpha_k)\, e^{2\eta_k z}$$

* Este clar într-adevăr că $s = \mathfrak{p}(x)$ nu poate trece prin nici una din valorile e_2 și e_3, cînd variază de la $+\infty$ la e_1.

și deci

$$\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(\alpha_k) = \frac{[\sigma(z-\alpha_k)]^2 \eta_k z}{[\sigma(z)]^2 [\sigma(\alpha_k)]^2},$$

ceea ce arată că

$$\sqrt{\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(\alpha_k)} = \sqrt{\mathfrak{p}(z) - e_k} = \frac{\sigma(z-\alpha_k)\, e^{\eta_k z}}{\sigma(z)\,\sigma(\alpha_k)}.$$

Se vede astfel că funcția $\sqrt{\mathfrak{p}(z) - e_k}$ este uniformă. Se notează de obicei

$$\sigma_k(z) = \frac{\sigma(z-\alpha_k)\, e^{\eta_k z}}{\sigma(\alpha_k)} \quad (k = 1,\ 2,\ 3); \tag{35}$$

funcțiile astfel definite se numesc *funcții σ cu indici*. Avem deci,

$$\sqrt{\mathfrak{p}(z) - e_k} = \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}.$$

Ținînd seama de (35), obținem

$$\sigma_k(z + \omega_k) = -\sigma_k(z)\, e^{2\eta_k z + \eta_k \omega_k}$$

și deci

$$\frac{\sigma_k(z+\omega_k)}{\sigma(z+\omega_k)} = \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}.$$

Dacă $k' \neq k$, se obține (ținînd seama și de relația din § 13)

$$\eta_k \omega_{k'} - \eta_{k'} \omega_k = \pm \pi i,$$

$$\frac{\sigma_k(z+\omega_{k'})}{\sigma(z+\omega_{k'})} = -\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}.$$

Deci funcția $\sqrt{\mathfrak{p}(z) - e_k}$, uniformă și meromorfă, este periodică de ω_k și se reproduce înmulțită cu -1 dacă adăugăm la z pe $\omega_{k'}$ $(k' \neq k)$.

Ea este deci dublu periodică de ω_k și $2\,\omega_{k'}$.

17. Funcțiile sn z, cn z și dn z ale lui Jacobi. Primele funcții dublu periodice întîlnite au fost definite cu ajutorul ecuațiilor lor diferențiale, analoge cu cea a lui $\mathfrak{p}(z)$ de mai sus.

Cu ajutorul funcțiilor introduse pînă aici, ele se pot defini prin relațiile următoare.

Desemnîndu-le prin notațiile obișnuite avem

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn} z &= \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp(z) - e_3}} \\ \operatorname{cn} z &= \frac{\sqrt{\wp(z) - e_1}}{\sqrt{\wp(z) - e_3}} \\ \operatorname{dn} z &= \frac{\sqrt{\wp(z) - e_2}}{\sqrt{\wp(z) - e_3}} \cdot \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Dacă notăm, cum se obișnuiește,

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \lambda^2,$$

funcțiile din (36) satisfac, cum se verifică îndată relațiile

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1$$

$$\operatorname{dn}^2 z + \lambda^2 \operatorname{sn}^2 z = 1,$$

ceea ce arată analogia primelor două funcții (36) cu $\sin z$ și $\cos z$.

De asemenea, derivînd, se obține

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sn} z) = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z$$

și deci pentru $u = \operatorname{sn} z$, ecuația diferențială

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = (e_1 - e_3)\ (1 - u^2)\ (1 - \lambda^2 u^2).$$

Asemenea ecuații s-au prezentat întîi în calculul arcului de elipsă.

Funcțiile (36) au fost introduse de C. J a c o b i și au fost puse la baza teoriei funcțiilor eliptice, creată de el înainte de teoria lui Weierstrass. Ele sînt avantajoase în unele aplicații ale teoriei*.

* Pentru alte dezvoltări în ceea ce privește teoria funcțiilor dublu periodice (eliptice) și în special funcțiile lui Jacobi, a se vedea D a v i d E m m a n u e l, *Lecții de teoria funcțiilor*, v. II, București, 1929.

IV. FUNCȚII SIMPLU PERIODICE

18. Funcțiile meromorfe simplu periodice constituie o clasă mult mai vastă decît aceea a funcțiilor dublu periodice.

Vom da aici numai cîteva noțiuni asupra lor, care arată că problemele se pun, în general, în mod diferit.

Fie ω o cantitate complexă dată și $f(z)$ o funcție meromorfă, admițînd-o ca perioadă.

Avem, așadar, oricare ar fi z și întregul m,

$$f(z + m\omega) = f(z).$$

Să facem schimbarea de variabilă

$$z = \frac{\omega}{2\pi i} \log u. \tag{37}$$

Funcția

$$f\left(\frac{\omega}{2\pi i} \log u\right) = \varphi(u)$$

este uniformă și meromorfă în $(z) - 0 - \infty$, adică nu poate avea puncte singulare (în afară de poli) decît cel mult în 0 și în ∞.

Distingem, prin urmare, următoarele cazuri:

1° $\varphi(u)$ nu are nici un punct singular esențial; este deci rațională.

2° $\varphi(u)$ nu are alt punct singular esențial decît ∞; este deci meromorfă.

3° $\varphi(u)$ are punctele singulare esențiale 0 și ∞.

Ținînd seamă de (37), se vede că, în primul caz, funcțiile $f(z)$ sînt de forma

$$f(z) = R\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}\right),$$

unde R este funcție rațională oarecare.

În al doilea caz, avem

$$f(z) = \frac{G_1\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}\right)}{G_2\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}\right)},$$

unde G_1 și G_2 sînt funcții întregi oarecare.

În al treilea caz,

$$f(z) = \frac{G_1\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}\right)}{G_2\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}\right)} + \frac{G_3\left(e^{\frac{-2\pi i}{\omega} z}\right)}{G_4\left(e^{\frac{-2\pi i}{\omega} z}\right)},$$

unde G_1, G_2, G_3, G_4 sînt funcții întregi oarecare.

19. Paralelogramul de perioade al funcțiilor dublu periodice este aici înlocuit cu o *bandă de periodicitate*, a cărei direcție poate fi luată arbitrar, însă diferită de cea a perioadei ω.

Dacă, pentru a păstra analogia cu cazul funcțiilor dublu periodice, vrem să ne mărginim la funcțiile simplu periodice care în banda de periodicitate nu iau decît de un număr finit de ori pe oricare din valorile lor, trebuie să considerăm numai primul caz de mai sus.

Aceste funcții pot fi scrise

$$R\left(\cos\frac{2\pi}{\omega}z + i\,\sin\frac{2\pi}{\omega}z\right), \tag{38}$$

unde R este o funcție rațională arbitrară.

În cazul particular $\omega = \pi$, funcțiile (38) sînt ceea ce se obișnuiește a se numi funcții trigonometrice de perioadă π.

Să observăm că în banda de periodicitate, în care orice valoare a funcției este luată, în general, de un același număr finit de ori (gradul lui R), există totuși două valori excepționale, care nu sînt luate decît de un număr mai mic de ori (sau de loc). Acestea sînt $R(0)$ și $R(\infty)$.

Într-adevăr, $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$ nu ia niciodată valoarea 0 nici valoarea ∞.

20. **Funcția θ a lui Jacobi.** Dacă R este un polinom, valoarea ∞ nu este luată niciodată în banda de periodicitate și funcția este întreagă.

În general, funcțiile simplu periodice întregi, aparținînd unuia oarecare din cazurile de mai sus, sînt toate reprezentabile prin serii de tipul

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi i}{\omega}nz},$$

unde c_n sînt coeficienți astfel că seria Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n u^n$$

converge în domeniul

$$0 < |u| < \infty.$$

Să considerăm, în particular, funcția definită prin

$$\psi(z) = \sigma(z)\, e^{-\frac{\eta_1}{\omega_1}z^2 + \frac{\pi i}{\omega_1}z}, \tag{39}$$

ω_1 fiind una din perioadele cu care a fost formată $\sigma(z)$.

Se verifică cu ușurință că această funcție admite perioada ω_1.

Pe de altă parte, ea este întreagă; ea se reprezintă deci prin

$$\psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}nz}. \tag{40}$$

Se calculează $\psi(z + \omega_2)$, aplicînd aceeași formulă de transformare a lui σ, și se obține

$$\psi(z + \omega_2) = - e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}} \psi(z),$$

dacă ținem seama de relația $\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = \pi i$ *.

Deci, substituind în (40) și egalînd coeficienții corespunzători, rezultă

$$c_{n+1} = - c_n e^{\frac{2n\pi i \omega_2}{\omega_1}}.$$

Să notăm

$$e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}} = q.$$

Avem atunci

$$c_{n+1} = - c_n q^{2n}$$

și deci, prin recurență,

$$c_n = (-1)^n q^{n(n-1)} c_0 = (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} C,$$

unde C este o constantă convenabilă.

Avem, așadar,

$$\psi(z) = C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{\frac{2n\pi i}{\omega_1} z}$$

și deci, după (39),

$$\sigma(z) = e^{\frac{\eta_1}{\omega_1} z^2} C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{\frac{(2n-1)\pi i}{\omega_1} z} = e^{\frac{\eta_1}{\omega_1} z^2} C\theta\left(\frac{z}{\omega_1}\right), \qquad (41)$$

unde am notat

$$\theta(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi i v}. \qquad (42)$$

Această funcție întreagă se numește funcția θ a lui J a c o b i.

Se constată din (42) și (41) că avem $\theta(0) = 0$.

Pentru a determina pe C, să împărțim relația precedentă cu z și să facem apoi pe z să tindă către 0.

Obținem

$$C = \frac{\omega_1}{\theta'(0)}$$

și deci relația următoare între σ și θ

$$\sigma(z) = \frac{\omega_1}{\theta'(0)} e^{\frac{\eta_1}{\omega_1} z^2} \theta\left(\frac{z}{\omega_1}\right). \qquad (43)$$

* Dacă avem $\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = -\pi i$, se va schimba rolul celor două perioade în considerațiile de mai sus.

Seria din (42), prin care se definește $\theta(v)$, este foarte repede convergentă.

Într-adevăr, din faptul că avem $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i$ (și nu $-\pi i$), rezultă că coeficientul lui i din $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ este pozitiv și deci că avem $|q| < 1$, iar exponentul lui q în (42) este tot pozitiv și crește ca $|n|^2$.

În formula (43) avem deci nu numai o dezvoltare în serie a lui $\sigma(z)$, dar o dezvoltare care converge foarte repede, cînd v este real.

Relația (43) arată și înrudirea dintre σ și θ.

În teoria funcțiilor eliptice, după C. J a c o b i, funcția θ joacă efectiv un rol analog cu cel al lui σ din teoria lui *Weierstrass* dezvoltată mai sus. Ca și σ, funcția θ este întreagă; spre deosebire de σ, funcția θ este însă și periodică, și anume admite una din cele două perioade fundamentale ale funcțiilor eliptice cărora le corespunde.

Dacă în unele aplicații, funcția θ, ca și funcțiile sn, cn și dn, introduse tot de J a c o b i, prezintă anumite avantaje după cum am mai spus, în schimb funcțiile lui Weierstrass, avînd o structură mai simetrică, permit o dezvoltare mai armonioasă a întregii teorii.

Să mai menționăm că, pe lîngă funcția θ de mai sus, se mai introduc, în teoria funcțiilor eliptice funcții analoge legate de funcțiile σ cu indice, de care am vorbit în treacăt mai sus.

Pentru amănunte relative la aceste chestiuni, se poate consulta cu folos cursul citat mai sus al lui D a v i d E m m a n u e l.

CAPITOLUL VIII

FUNCȚII INTREGI DE ORDIN FINIT

I. ORDINUL DE CREȘTERE AL FUNCȚIILOR ÎNTREGI

1. Am studiat, în capitolul precedent, o clasă importantă de funcții meromorfe, funcțiile periodice, precum și unele funcții întregi sau meromorfe legate de acestea.

Teoria generală a funcțiilor meromorfe a căpătat în ultimele decenii, grație în special lucrărilor lui R. N e v a n l i n n a și ale elevilor săi, o mare dezvoltare și a devenit unul din capitolele cele mai importante ale teoriei moderne a funcțiilor* Ea a avut drept model teoria funcțiilor întregi, din care vom da aici cîteva elemente esențiale, rămînînd ca teoria generală a funcțiilor meromorfe, ca și unele extensiuni ale ei, să facă obiectul unor capitole speciale din volumele următoare ale acestui tratat.

2. Am văzut (cap. VI) că funcțiile întregi $G(z)$ se pot pune sub forma de produs infinit

$$G(z) = e^{H(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}} \tag{1}$$

unde $H(z)$ reprezintă altă funcție întreagă, în general, după cum vom vedea, mai simplă decît $G(z)$, iar $\{a_n\}$ șirul zerourilor funcției $G(z)$.

Am văzut, pe de altă parte (cap. III, § 41), că dacă $M(r)$ reprezintă maximul lui $|G(z)|$ pe $|z| = r$ și dacă avem pentru un șir de valori r, tinzînd către ∞, inegalitatea

$$M(r) < r^p, \qquad (p = \text{constantă pozitivă}), \tag{2}$$

atunci $G(z)$ este neapărat un polinom de gradul p cel mult (propoziție care generalizează teorema lui Liouville).

---

* A se vedea în special R o l f N e v a n l i n n a, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Paris, 1929 și *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, 1936, ed. a II-a, 1953.

Funcția $M(r)$ este întotdeauna pozitivă și crescătoare. Relația (2) și propoziția precedentă arată că, pentru ca $G(z)$ să fie funcție transcendentă, trebuie ca ea «să crească destul de repede». Vom preciza această expresie, atașînd fiecărei funcții întregi $G(z)$, funcția reală și pozitivă, definită pentru orice $r > 0$,

$$M(r) = \max_{|z| = r} |G(z)|,$$

funcție care, pentru noi, va caracteriza «modul de creștere» al lui $G(z)$.

3. Să considerăm mai întîi cîteva exemple simple de funcții întregi și funcțiile $M(r)$ corespunzătoare.

Pentru funcția e^z avem, după cum se vede îndată, $M(r) = e^r$. De asemenea, pentru cos z (sau sin z), avem $M(r) = e^{2r\alpha(r)}$, unde $\lim \alpha(r) = \frac{1}{2}$, pentru $r \to \infty$.

În mod mai general, dacă $G(z) = e^{P(z)}$, $P(z)$ fiind un polinom de gradul k, avem

$$e^{\mu_1 r^k} < M(r) < e^{\mu_2 r^k},$$

în care μ_1 și μ_2 sînt constante pozitive.

Într-adevăr,

$$|e^{P(z)}| = e^{P(x, y)},$$

unde $P(x, y) = \Re P(z)$, iar $\max_{|z| = r} P(x, y)$ este cuprins între $\mu_1 r^k$ și $\mu_2 r^k$, deoarece P este de grad k.

4. Pentru a da un sens precis expresiei de «creștere mai rapidă» sau «mai înceată» a lui $M(r)$ și deci a lui $G(z)$, se adoptă următoarele definiții: se spune că o funcție $A(r)$ reală și crescătoare, de variabila reală pozitivă r, *crește mai repede* decît altă funcție $B(r)$ de același fel, dacă avem

$$\lim_{r \to \infty} \frac{A(r)}{B(r)} = \infty.$$

Se spune atunci totodată că $B(r)$ *crește mai încet* decît $A(r)$.

Dacă raportul $\frac{A(r)}{B(r)}$ rămîne cuprins, de la un r destul de mare înainte, între două numere *pozitive* fixe, se spune că creșterea celor două funcții are aceeași rapiditate sau că ele sînt asimptotic echivalente

Bineînțeles, din două funcții oarecare date, de felul celor de mai sus, și a căror creștere nu are aceeași rapiditate, nu crește neapărat una din ele mai repede decît cealaltă. În acest caz, se spune că creșterile celor două funcții nu sînt comparabile între ele.

Un polinom în r crește întotdeauna mai repede decît oricare alt polinom de grad mai mic. Dar funcția e^r crește mai repede decît orice polinom.

Tot astfel, $e^{\mu r}$ crește cu atît mai repede, cu cît μ (pozitiv) este mai mare, iar $e^{\mu' r^2}$ (cu $\mu' > 0$) crește mai repede decît orice $e^{\mu r}$ oricît de mare ar fi μ

și oricît de mic ar fi numărul pozitiv μ'. Se obțin astfel funcții $e^{\mu r^k}$ (μ și k pozitivi), care cresc cu atît mai repede cu cît k este mai mare (indiferent de μ) iar, la k egali, cu atît mai repede cu cît μ este mai mare.

Toate acestea au un caracter elementar și sînt cunoscute din elementele analizei matematice. Atragem numai aici atenția asupra lor, pentru că asemenea considerații vor juca un rol important în teoria funcțiilor întregi și în clasificarea lor.

5. Ordinul unei funcții întregi. Forma funcției $M(r)$, în cazul funcțiilor întregi transcendente cele mai simple considerate în § 3, duce la următoarea definiție a ceea ce se numește *ordinul* lui $G(z)$.

Fie $M(r)$ funcția atașată lui $G(z)$, după definiția din § 2.

După teorema lui Liouville, avem întotdeauna, dacă $G(z)$ nu este o constantă, $\lim M(r) = \infty$, pentru $r \to \infty$.

Să notăm

$$\rho = \lim \sup \frac{\log \log M(r)}{\log r} . \tag{3}$$

Numărul ρ este bine determinat, o dată ce s-a dat $G(z)$, deci și $M(r)$. El poate fi finit $\geqslant 0$ sau infinit și se numește *ordinul* funcției întregi $G(z)$*.

Se vede îndată, aplicînd definiția (3) funcțiilor elementare considerate în § 3, că ordinul lui e^z, ca și al lui $\cos z$ și $\sin z$, este 1, iar ordinul funcției întregi $e^{P(z)}$ este egal cu gradul polinomului $P(z)$. Orice polinom în z are, considerat ca funcție întreagă, ordinul zero.

Noțiunea de ordin al unei funcții întregi, introdusă de E. Borel **, este extrem de importantă pentru clasificarea și studiul acestor funcții.

Vom vedea că mai există și alte funcții întregi de ordin zero în afară de polinoame. Proprietățile acestora se apropie mai mult de ale polinoamelor decît proprietățile celorlalte funcții întregi transcendente.

În general, o funcție întreagă se depărtează cu atît mai mult de funcțiile polinoame cu cît ordinul ei este mai mare.

Vom considera aici, în mod aproape exclusiv, funcțiile întregi de ordin *finit*.

Din (3) se vede cu ușurință că ordinul ρ posedă următoarele proprietăți:

1° Oricît de mică ar fi cantitatea pozitivă ε, avem, *de la un r suficient de mare înainte*, inegalitatea

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}. \tag{4}$$

2° Oricît de mic ar fi ε, avem, *pentru un șir determinat de valori* $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ *crescătoare și tinzînd către* ∞ (șir depinzînd de ε), inegalitatea

$$M(r_n) > e^{r_n^{\rho-\varepsilon}} \tag{4'}$$

---

* Cititorul va demonstra cu ușurință că mulțimea limitelor expresiei din (3) este întotdeauna închisă.

** A se vedea de exemplu: E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1921. Denumirea de ordin a prevalat față de aceea de «ordin aparent», folosită în această monografie.

Proprietățile 1° și 2° pot servi și la definirea ordinului ρ.

Ordinul finit este, într-adevăr, singurul număr care satisface aceste proprietăți, iar dacă nu există nici un număr finit care satisface pe (4), ordinul este infinit.

6. Pentru determinarea efectivă a ordinului unei funcții întregi date

$$G(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{5}$$

este uneori avantajos să putem înlocui funcția $M(r)$, în definiția (3), cu o altă funcție crescătoare, determinată cu ajutorul coeficienților c_n ai dezvoltării (5). Vom arăta, după E. B o r e l, cum se poate face aceasta.

Fie $K(r)$ valoarea celui mai mare dintre modulele $|c_n| r^n$ ale termenilor seriei (5).

Cum (5) este convergentă pentru orice valoare finită z, pentru orice $z=r$ aceste module tind către zero cu $1/n$ și deci există cel puțin un $|c_n| r^n$ maxim, $K(r)$, pentru orice r.

Avem, evident, pentru orice $r > 0$ și orice $R > r$,

$$M(r) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \leqslant K(R) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = \frac{RK(R)}{R-r}.$$

Să luăm $R = 2r$.

Inegalitatea de mai sus devine atunci

$$M(r) \leqslant 2\, K(2r),$$

valabilă pentru orice r pozitiv.

Pe de altă parte, inegalitățile lui Cauchy (cap. III. § 41) dau imediat

$$K(r) \leqslant M(r),$$

deci

$$M(r) \leqslant 2\, K(2r) \leqslant 2\, M(2r),$$

adică

$$\frac{\log \log M(r)}{\log r} \leqslant \frac{\log \log 2K(2r)}{\log 2r} \cdot \frac{\log 2r}{\log r} \leqslant \frac{\log \log 2M(2r)}{\log 2r} \cdot \frac{\log 2r}{\log r}.$$

De aici se deduce

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \log K(r)}{\log r},$$

deoarece, după cum se verifică ușor, dacă $G(z)$ nu este o constantă,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log \log 2K(r)}{\log \log K(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log \log 2M(r)}{\log \log M(r)} = 1.$$

În definiția ordinului prin egalitatea (3) se poate deci înlocui $M(r)$ cu $K(r)$.

7. Ca aplicație, să considerăm funcția întreagă

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{\frac{n^2}{2}}}. \tag{6}$$

Avem aici

$$|c_n| r^n = \frac{r^n}{e^{\frac{n^2}{2}}},$$

care își atinge valoarea maximă (r fix) pentru $n = N(r)$ întreg cuprins între $\log r - 1$ și $\log r + 1$*.

Deci,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r)}{\log r} = 1.$$

Dar cum

$$K(r) = \frac{r^{N(r)}}{e^{\frac{N^2(r)}{2}}},$$

avem

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log K(r)}{\log r} = \rho = 0$$

și funcția (6) constituie un exemplu de funcție întreagă transcendentă de ordin zero.

Vom mai întîlni și alte moduri de a forma asemenea funcții.

8. Exponentul de convergență al zerourilor. În capitolul VI am introdus un număr întreg care, într-un anumit sens, putea fi considerat ca măsură a densității cu care sînt răspîndite în plan punctele unui șir

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{7}$$

care nu are punct de acumulare la distanță finită.

Presupunînd că am lăsat la o parte din șirul (7) termenii evantuali nuli și că a_n sînt așezați în ordinea modulelor nedescrescătoare, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}}, \tag{8}$$

unde λ este un număr real $\geqslant 0$, are termenii ei pozitivi și necrescători.

Dacă pentru $\lambda = \lambda_1$ seria (8) este convergentă, ea este convergentă și pentru orice $\lambda > \lambda_1$. Deci, valorile lui $\lambda \geqslant 0$ pot fi împărțite în două categorii, valori de convergență și valori de divergență, astfel încît orice valoare din prima categorie este mai mare ca orice valoare din a doua categorie.

---

* Acest rezultat se obține înlocuind n printr-o variabilă continuă x și examinînd funcția corespunzătoare de x. Maximul ei este atins pentru $x = \log r$; de unde, limitele între care este cuprins $N(r)$.

Să însemnăm cu ρ_1 marginea superioară a valorilor din cea de-a doua categorie [valori de divergență pentru (8)].

Numărul real ρ_1 poate fi valoare de convergență sau de divergență; dar, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, pentru $\lambda = \rho_1 + \varepsilon$, seria (8) va fi convergentă, iar pentru $\lambda = \rho_1 - \varepsilon$, ea va fi divergentă*.

Acest număr ρ_1, introdus tot de E. B o r e l, se numește *exponentul de convergență al șirului* (7). El poate fi zero, dacă orice $\lambda > 0$ face seria (8) convergentă, sau ∞, dacă orice λ face seria (8) divergentă.

Se vede că exponentul de convergență al lui (7) măsoară densitatea punctelor respective în plan cu mai multă precizie decît numărul întreg analog, introdus în capitolul VI (acest număr întreg poate să difere de ρ_1 printr-o cantitate pozitivă $\leqslant 1$).

Vom da acum cîteva teoreme fundamentale — datorite în esență lui H. P o i n c a r é, lui J. H a d a m a r d și lui E. B o r e l — care arată relațiile dintre ordinul ρ al unei funcții întregi și exponentul de convergență ρ_1 al zerourilor acestei funcții.

9. T e o r e m ă. *Oricare ar fi funcția întreagă* $G(z)$, *ordinul ei este cel puțin egal cu exponentul de convergență al zerourilor lui* $G(z)$.

Dacă ordinul este infinit, propoziția este banală.

Nu avem deci să ne ocupăm decît de cazul ordinului ρ finit.

Putem presupune că $G(0) = 1$, deoarece în caz contrar avem

$$G(z) = cz^k\,[1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots] = cz^k G_1(z),$$

cu $G_1(0) = 1$, exponentul de convergență al zerourilor fiind același pentru $G(z)$ și $G_1(z)$ ca și ordinul acestor două funcții, după cum se verifică ușor.

Să considerăm atunci polinoamele

$$P_n(z) = (a_1 - z)(a_2 - z)\ldots(a_n - z),$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sînt zerourile lui $G(z)$, așezate în ordinea modulelor lor nedescrescătoare.

Fie C un cerc cu centrul în origine, de rază R. Avem, după formula integrală a lui Cauchy, aplicată funcției întregi $\frac{G(z)}{P_n(z)}$,

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{G(0)}{P_n(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{G(\zeta)\,d\zeta}{\zeta\, P_n(\zeta)}.$$

Fie

$$r_n = |a_n|.$$

Să alegem

$$R = 3r_n.$$

Atunci pe $|z| = R$,

$$|P_n(z)| \geqslant (R - r_n)^n = (2r_n)^n.$$

---

* Se spune că șirul (7) aparține *clasei inferioare* sau *clasei superioare* de exponent ρ_1, după cum, pentru $\lambda = \rho_1$, seria (8) este convergentă sau divergentă (G. V a l i r o n).

Șirurile (7), în care $|a_n| = n^{1 + \frac{2 \log \log n}{\ln n}}$ sau $|a_n| = n$, aparțin, respectiv, clasei inferioare și clasei superioare de exponent $\rho_1 = 1$.

Cum $G(z)$ este de ordinul ρ, avem, dacă r_n (deci n) este destul de mare, și pentru $\varepsilon > 0$ dat,

$$\max_{|z|=R=3r_n} |G(z)| < e^{(3r_n)^{\rho+\varepsilon}},$$

deci,

$$\frac{1}{r_1 \cdot r_2 \dots r_n} < \frac{e^{(3r_n)^{\rho+\varepsilon}}}{(2r_n)^n}$$

și deci, cu atît mai mult,

$$\frac{1}{(r_n)^n} < \frac{e^{(3r_n)^{\rho+\varepsilon}}}{(2r_n)^n},$$

adică,

$$2^n < e^{(3r_n)^{\rho+\varepsilon}},$$

din care se deduce

$$n < \frac{(3r_n)^{\rho+\varepsilon}}{\ln 2} = \mu \cdot (r_n)^{\rho+\varepsilon}, \tag{9}$$

cu μ depinzînd numai de ρ și de ε, nicidecum de r_n.

Inegalitatea (9) (ca și inegalitățile precedente) are loc pentru n destul de mare.

Să considerăm acum seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^\lambda} \tag{10}$$

și să facem $\lambda = \rho + \eta$, cu η pozitiv și $> \varepsilon$.

Din (9) se deduce, pentru n_1 suficient de mare,

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\rho+\eta}} < \mu^{\frac{\rho+\eta}{\rho+\varepsilon}} \cdot \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\rho+\eta}{\rho+\varepsilon}}}$$

și cum $\frac{\rho+\eta}{\rho+\varepsilon} > 1$, seria din membrul al doilea converge.

Deci, dacă $\lambda > \rho + \eta$, seria (10) converge.

Dar ε este un număr pozitiv arbitrar de mic, deci și η este tot așa.

Prin urmare, dacă $\lambda > \rho$, seria (10) converge.

Rezultă că ρ_1 fiind exponentul de convergență al zerourilor $a_1, a_2, \dots$, avem $\rho_1 \leqslant \rho$, adică ceea ce voiam să demonstrăm.

10. Teorema din paragraful precedent dă o primă indicație asupra relației dintre densitatea de răspîndire a zerourilor unei funcții întregi și ordinul acestei funcții.

Fie b o valoare complexă oarecare.

Funcția întreagă $G_1(z) = G(z) - b$, pentru care $M_1(r)$ este cuprins între $M(r) + |b|$ și $M(r) - |b|$ este evident de același ordin ca și $G(z)$.

Prin urmare, exponentul de convergență al zerourilor lui $G_1(z)$, care măsoară densitatea punctelor în care $G(z) = b$, este întotdeauna cel mult egal cu ordinul ρ al lui $G(z)$, *oricare ar fi numărul complex* b.

11. Inegalitatea (9) este interesantă și în sine.

Să notăm cu $n(r)$ numărul zerourilor lui $G(z)$ al căror modul nu depășește r. Cum $r \geqslant r_{n(r)}$, putem scrie atunci, în loc de (9), inegalitatea întărită

$$n(r) < \mu \cdot r^{\rho+\varepsilon},$$

care ne dă o limitare superioară a numărului zerourilor cuprinse în $|z| \leqslant r$, valabilă pentru orice funcție întreagă de ordin ρ, de la un r suficient de mare înainte, coeficientul μ nedepinzînd decît de ρ și de ε.

12. Teorema din § 9 dă o proprietate valabilă pentru orice funcție întreagă.

Vom preciza acum acest rezultat, pentru cazul cînd funcția este un produs canonic $g(z)$, adică în cazul cînd în expresia (1) a lui $G(z)$ nu figurează factorul $e^{H(z)}$.

T e o r e m ă. *Pentru orice produs canonic, ordinul este egal cu exponentul de convergență al zerourilor.*

După teorema precedentă, nu avem de considerat decît cazul cînd exponentul de convergență ρ_1 al zerourilor produsului canonic $g(z)$ este finit. Avem, în acest caz, după cum am văzut în capitolul VI,

$$g(z) = z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}$$

unde p este cel mai mare întreg pentru care seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^p}$$

este divergentă.

Avem $p \leqslant \rho_1 \leqslant p + 1$.

Punînd $\frac{z}{a_n} = u$, să notăm factorii primari ai produsului canonic prin

$$F(u) = (1 - u)\, e^{u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^p}{p}}.$$

Pentru orice

$$k > p \tag{11}$$

există un număr $\mu(k)$, astfel încît pentru

$$|u| \geqslant \mu(k), \tag{12}$$

avem

$$|F(u)| < e^{2|u|^k}.$$

Pe de altă parte, pentru $|u| \leqslant \frac{1}{2}$, avem

$$|F(u)| = |1-u| \left| e^{-\left(\ln(1-u) + \frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+2}}{p+2} + \cdots\right)} \right| = \left| e^{-\left(\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+2}}{p+2} + \cdots\right)} \right|,$$

deci

$$|F(u)| < e^{\frac{|u|^{p+1}}{p+1} + \frac{|u|^{p+2}}{p+2} + \cdots} < e^{\frac{|u|^{p+1}}{1-|u|}} < e^{2|u|^{p+1}}.$$

Așadar, pentru orice

$$k \leqslant p+1 \tag{13}$$

și pentru

$$|u| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{14}$$

vom avea și

$$|F(u)| < e^{2|u|^k}.$$

Din (11), (12), (13) și (14), se deduce că, pentru orice număr k care satisface simultan inegalitățile,

$$p < k \leqslant p+1$$

și pentru

$$|u| \geqslant \mu(k) \text{ sau } |u| \leqslant \frac{1}{2},$$

avem

$$|F(u)| < e^{2|u|^k}. \tag{15}$$

Or, $F(u)$ este, pentru $|u| < \mu(k)$, inferior lui

$$A = [1 + \mu(k)]\, e^{\mu(k) + \frac{\mu^2(k)}{2} + \cdots + \frac{\mu^p(k)}{p}},$$

iar $e^{2|u|^k}$ este, pentru $|u| > \frac{1}{2}$, superior lui

$$B = e^{\frac{1}{2^{k-1}}}.$$

Deci, dacă α este un număr > 1 și astfel ca

$$B^\alpha > A,$$

avem în intervalul

$$\frac{1}{2} < |u| < \mu(k)$$

inegalitatea

$$|F(u)| < e^{2\alpha|u|^k}. \tag{16}$$

Or, cum (15) este valabil în afara acestui interval, iar $\alpha > 1$ se vede că (16) *este valabil pentru orice* $|u|$, în condițiile lui (15), adică dacă k satisface condiția

$$p < k \leqslant p + 1. \tag{17}$$

Cum seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}} \tag{18}$$

este convergentă pentru $\lambda = p + 1$ (după definiția lui p), se poate alege un k *satisfăcînd* pe (17) și totodată astfel ca seria (18), *pentru* $\lambda = k$, *să fie convergentă.*

Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat arbitrar, să determinăm atunci un n_1 astfel că

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k} < \varepsilon,$$

și să scriem expresia lui $g(z)$ de mai sus sub forma

$$g(z) = z^m \cdot \prod_{n=1}^{n_1} \cdot \prod_{n=n_1+1}^{\infty}, \tag{19}$$

unde sub semnul Π figurează factorii primari ai produsului canonic. Primii doi factori din (19) sînt, pentru $|z|$ suficient de mare, în modul, inferiori lui

$$e^{\varepsilon |z|^k},$$

deoarece exponenții din $\prod_{n=1}^{n_1}$ sînt de gradul $p < k$.

Cel din urmă factor din (19) este, după (16) și (17), în modul, inferior lui

$$e^{2\alpha |z^k| \cdot \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k}} < e^{2\alpha\varepsilon |z|^k}.$$

Rezultă de aici că avem, pentru r destul de mare,

$$\max_{|z|=r} |g(z)| < e^{2\varepsilon(1+\alpha)r^k}.$$

Cum $\varepsilon > 0$ poate fi luat arbitrar de mic, această inegalitate este întărită de

$$\max_{|z|=r} |g(z)| < e^{r^k}. \tag{20}$$

Dar ρ_1 este neapărat în intervalul închis $(p, p+1)$. Deci, k poate fi luat, întotdeauna, astfel ca să satisfacă pe (17) și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k}$ să fie convergentă, și totodată $|k - \rho_1|$ să fie oricît de mic.

Într-adevăr, dacă $\rho_1 < p + 1$, ajunge să luăm pe k oarecare în $(p, p+1)$ superior lui ρ_1, iar dacă $\rho_1 = p + 1$, putem lua $k = \rho_1$, deoarece atunci (după definiția lui p) seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho_1}}$ este convergentă.

Prin urmare, oricare ar fi η pozitiv, de la un r suficient de mare înainte vom avea

$$\max_{|z|=r} |g(z)| < e^{r^{\rho_1+\eta}},$$

ceea ce arată că $\rho \leqslant \rho_1$.

Dar, după teorema precedentă, $\rho_1 \leqslant \rho$.

Deci, în cazul unui produs canonic de ordinul ρ, avem $\rho_1 = \rho$.

Exemplu: ordinul funcției $\sigma(z)$ a lui Weierstrass (cap. VI) este 2.

13. Observație. Teorema din paragraful precedent ne permite să construim funcții întregi de orice ordin ρ, dat dinainte. Dacă $\rho \neq 0$ și finit, formăm de exemplu produsul canonic corespunzător zerourilor $|a_n| = n^{\frac{1}{\rho}}$.

Dacă $\rho = 0$, sau $\rho = \infty$, putem lua, respectiv, produsul canonic corespunzător lui $|a_n| = n!$ sau lui $|a_n| = \ln n$.

14. Ne-am ocupat pînă aici de limitarea superioară a lui $|G(z)|$. Pentru diverse chestiuni, este foarte important să putem limita și inferior această funcție.

Bineînțeles că o asemenea limitare, dacă nu este banală, trebuie să se mărginească la *anumite* valori crescînd la infinit ale lui r, deoarece, în general, orice funcție $G(z)$ are zerouri oricît de depărtate de origine.

Următoarea teoremă, bogată în consecințe în teoria funcțiilor întregi, este datorită lui J. Hadamard:

Teoremă. *Oricare ar fi produsul canonic $g(z)$ de ordin finit ρ, există o infinitate de cercuri (C) cu centrul în origine și cu raza r tinzînd către infinit, pe care avem*

$$\min_{|z|=r} |g(z)| > e^{-r^{\rho+\eta}} \quad (\eta > 0)$$

de la o anumită valoare a lui r înainte (care, evident, depinde de η).

15. Să considerăm mai întîi un produs canonic *de ordinul* $\rho < 1$.

Fie

$$g(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right). \tag{21}$$

Drept cercuri (C) vom alege pe acelea a căror distanță la oricare din zerourile a_n este cel puțin egală cu 1. Asemenea cercuri există cu rază oricît de mare.

Într-adevăr, să considerăm coroanele circulare (Γ_n), definite prin

$$r_n - 1 \leqslant |z| \leqslant r_n + 1,$$

unde $r_n = |a_n|$.

În aceste coroane nu se pot găsi cercuri (C). Grosimea fiecăreia din Γ_n este 2; grosimea totală a tuturor (Γ_n) în care n nu depășește un număr dat m destul de mare este deci, după (9), inferioară lui

$$2\mu r_m^{\rho+\varepsilon},$$

unde μ nu depinde decît de ρ și ε.

Cum $\rho < 1$, putem lua și $\rho + \varepsilon < 1$ și deci, raportul către r_m al grosimii totale a coroanelor (Γ_n) în care $n \leqslant m$ tinde către 0 cu $1/m$.

Trebuie să existe deci cercuri C cu raza r oricît de mare vrem.

Pentru un r dat oarecare, să determinăm numerele întregi pozitive p și q, corespunzătoare acestui r, prin condițiile

$$\left.\begin{aligned} r_p \leqslant 2r < r_{p+1} \\ q^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant 2r < (q+1)^{\frac{1}{\sigma}}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

unde $r_p = |a_p|$, iar $\sigma = \rho + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fiind luat destul de mic pentru ca $\sigma < 1$.

Să observăm că inegalitatea (9) are loc (de la un n suficient de mare înainte) chiar și dacă înlocuim pe μ cu 1. Într-adevăr, ea este întărită prin înmulțirea ultimului membru al ei cu $\frac{r_n^{\varepsilon'}}{\mu}$ (cu $\varepsilon' > 0$), deoarece acest raport tinde către infinit cu r_n, deci cu n.

În locul lui ε, vom avea atunci $\varepsilon + \varepsilon'$, dar și acesta este pozitiv arbitrar.

Deci, pentru p destul de mare [ceea ce revine a lua r destul de mare în (22)], avem $p < r_p^{\sigma}$, adică $r_p > p^{\frac{1}{\sigma}}$.

Din (22), se deduce atunci $(q+1)^{\frac{1}{\sigma}} > 2r > p^{\frac{1}{\sigma}}$, adică $q + 1 > p$ și deci

$$q \geqq p. \tag{23}$$

Să scriem atunci expresia lui $g(z)$ din (21) sub forma

$$g(z) = z^m \prod_{n=1}^{p} \cdot \prod_{n=p+1}^{q+1} \cdot \prod_{n=q+2}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right). \tag{24}$$

Dacă r este raza unui cerc (C), avem, pentru primul factor-produs din (24), ținînd seamă și de (22),

$$\left|\prod_{n=1}^{p}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\right| = \left|\prod_{n=1}^{p}\left(\frac{a_n - z}{a_n}\right)\right| > \frac{1}{(r_p)^p} \geqslant \frac{1}{(2r)^p}. \tag{25}$$

Pentru cel de-al doilea factor-produs din (24), avem

$$\left|\prod_{n=p+1}^{q+1}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\right| > \left(\frac{1}{2}\right)^{q-p+1}, \tag{26}$$

pentru că, după (22), $r < \frac{r_{p+1}}{2}$ și deci, *a fortiori*, $r < \frac{r_n}{2}$, pentru $n > p+1$.

În sfîrșit, pentru factorul-produs infinit din (24), avem

$$\left|\prod_{n=q+2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\right| > \prod_{n=q+2}^{\infty}\left(1-\frac{r}{n^{\frac{1}{\sigma}}}\right), \tag{27}$$

după inegalitățile (9) și (23).

Să observăm acum că, pentru $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, avem întotdeauna

$$1-\alpha > e^{-2\alpha}.$$

Cum $\frac{r}{n^{\frac{1}{\sigma}}} < \frac{1}{2}$, deducem deci din (27),

$$\left|\prod_{n=q+2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\right| > e^{-2r\sum_{n=q+2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{\sigma}}}}. \tag{28}$$

Dar avem

$$\sum_{n=q+2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{\sigma}}} < \int_{q+1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\sigma}{1-\sigma}(q+1)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}.$$

Cum $\sigma - 1 < 0$, această din urmă expresie este, după (22), inferioară lui

$$\frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^{\sigma-1}.$$

Înlocuind în (28), se obține deci,

$$\left|\prod_{n=q+2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\right| > e^{-(2r)^{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}}. \tag{29}$$

Inegalitățile (25), (26) și (29), care limitează inferior factorii lui (24), sînt valabile pentru r destul de mare.

Deci, pe cercurile (C) destul de mari, avem

$$|g(z)| > \frac{r^m}{(2r)^p}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-p+1}\cdot e^{-(2r)^{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \frac{r^m}{2}e^{-\left[p\ln r + q\ln 2 + (2r)^{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}\right]}$$

și, dacă ținem seama încă odată de (22) care dă $p \leqslant q \leqslant (2r)^{\sigma}$,

$$|g(z)| > \frac{r_m}{2}\cdot e^{-(2r)^{\sigma}\cdot\left[\ln r + \ln 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\right]}. \tag{30}$$

Dacă acum înlocuim în $\sigma = \rho + \varepsilon$ pe ε cu $\eta > \varepsilon$, inegalitatea (30), pentru r destul de mare, este întărită de

$$|g(z)| > e^{-r^{\rho+\eta}},$$

care exprimă tocmai enunțul teoremei, pentru cazul $\rho < 1$. Trebuie acum să înlăturăm această ipoteză, pentru ca teorema să fie complet demonstrată.

16. Fie, așadar, $g(z)$ un produs canonic de ordinul ρ finit, oarecare. Avem

$$g(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p},$$

unde p, fix și $\geqslant 0$, reprezintă cel mai mare întreg pentru care seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^p}$$

este divergentă.

Avem deci întotdeauna $p \leqslant \rho_1 = \rho$.

Fie N un întreg prim $> \rho$ și fie ω o rădăcină $\neq 1$ a ecuației binome

$$x^N - 1 = 0.$$

Să considerăm funcția întreagă

$$h(z) = g(z)\, g(\omega z)\, g(\omega^2 z) \ldots g(\omega^{N-1} z).$$

Un calcul simplu arată îndată, ținînd seama de relația

$$1 + \omega^s + \omega^{2s} + \ldots + \omega^{(N-1)s} = 0,$$

care are loc pentru orice rădăcină ω^s a ecuației binome, că avem

$$h(z) = z^{Nm} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{a_n}\right)^N\right].$$

Adică, dacă punem $z^N = Z$, h devine funcție întreagă de Z,

$$h(z) = H(Z),$$

$H(Z)$ fiind produs canonic de ordinul $\frac{\rho}{N} < 1$.

Avem, așadar, după paragraful precedent, punînd $r^N = R$,

$$\max_{|Z| = R} |H(Z)| = \max_{|z| = r} |h(z)| > e^{-R^{\left(\frac{\rho}{N} + \frac{\eta}{N}\right)}} = e^{-r^{\rho+\eta}} \tag{31}$$

pentru orice $\eta > 0$, de la un r destul de mare înainte, pe cercurile (C).

Dar, pentru r destul de mare, avem

$$\max_{|z| = r} |g(\omega^s z)| = \max_{|z| = r} |g(z)| < e^{r^{\rho+\eta}}. \tag{32}$$

Deci, din (31) și (32), putem deduce

$$\min_{|z|=r} |g(z)| > \frac{e^{-r^{\rho+\eta}}}{e^{(N-1)r^{\rho+\eta}}} = e^{-Nr^{\rho+\eta}} > e^{-r^{\rho+\eta'}},$$

cu $\eta' > \eta$ oarecare.

Această inegalitate este valabilă pe cercurile (C) destul de mari.

Teorema lui Hadamard, enunțată în § 14, este deci astfel complet demonstrată.

17. Limitarea inferioară obținută pe cercurile (C) pentru produsele canonice se scrie

$$\min_{|z|=r} |g(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

sau,

$$\max_{|z|=r} \frac{1}{|g(z)|} < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Se poate deci spune că, pe cercurile (C), $g(z)$ și $\frac{1}{g(z)}$ au același ordin de mărime.

Această observație lasă să se întrevadă că modul de creștere a funcțiilor meromorfe este susceptibil de a fi măsurat prin funcții analoge lui $M(r)$ care rămîn neschimbate cînd efectuăm asupra funcției o transformare liniară. În teoria generală modernă a funcțiilor meromorfe, aceasta se adevereşte.

II. APLICAȚII ALE NOȚIUNII DE ORDIN LA STUDIUL PROPRIETĂȚILOR FUNCȚIILOR ÎNTREGI

18. Am văzut, în capitolul VI, că orice funcție întreagă se poate reprezenta printr-un produs canonic înmulțit cu un factor exponențial $e^{H(z)}$, unde $H(z)$ este o altă funcție întreagă.

În cazul unei funcții întregi date $G(z)$, produsul canonic corespunzător se formează, după cum am arătat în capitolul VI, cu ajutorul zerourilor lui $G(z)$.

În ceea ce privește însă factorul exponențial, am spus că $H(z)$ este «în general» mai simplă decît însăși $G(z)$, dar determinarea sa efectivă, pe care am făcut-o numai în unele cazuri foarte particulare, constituie de obicei o problemă dificilă.

Teorema lui Hadamard, demonstrată în secțiunea precedentă, ne dă posibilitatea să arătăm că, *în cazul funcțiilor* $G(z)$ *de ordin finit* ρ, $H(z)$ *este întotdeauna un polinom al cărui grad nu depășește* ρ.

Să presupunem, într-adevăr, că avem de-a face cu o funcție $G(z)$ oarecare, de ordinul finit ρ.

După teorema din § 9, exponentul de convergență ρ_1 al zerourilor lui $G(z)$ este atunci și el finit și $\leqslant \rho$. Prin urmare, după capitolul VI, produsul canonic va fi format cu factori de gradul p, acesta fiind cel mai mare întreg pentru care seria $\sum_n \frac{1}{|a_n|^p}$ diverge.

Avem deci,

$$G(z) = e^{H(z)} \cdot z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}, \qquad (33)$$

cu $p \leqslant \rho_1$.

Să însemnăm cu $g(z)$ produsul canonic din (33).

După teorema din § 12, ordinul lui $g(z)$ este ρ_1.

Avem deci, de la un r destul de mare înainte,

$$|G(z)|_{|z|=r} < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

și, după teorema lui Hadamard, pe cercuri (C) cu raza crescînd la infinit,

$$\frac{1}{|g(z)|_{|z|=r}} < e^{r^{\rho_1+\varepsilon}}.$$

Rezultă atunci din (33) că, pentru un șir de valori r tinzînd către ∞, avem

$$|e^{H(z)}|_{|z|=r} < e^{r^{\rho+\varepsilon}+r^{\rho_1+\varepsilon}}$$

și pentru că $\rho_1 \leqslant \rho$, cu un $\eta > \varepsilon$,

$$|e^{H(z)}|_{|z|=r} < e^{r^{\rho+\eta}}.$$

Dar modulul primului termen este

$$e^{\Re H(z)}.$$

Pe un șir de cercuri (C), tinzînd către ∞, avem deci

$$\Re H(z) < r^{\rho+\eta}. \qquad (34)$$

Or, după altă teoremă datorită lui J. H a d a m a r d, demonstrată în capitolul III, § 41, dacă partea reală $\Re H(z)$ a unei funcții întregi rămîne, pe un șir de cercuri cu centrul în origine și cu raza tinzînd către ∞, inferioară lui r^k, funcția $H(z)$ este un polinom de grad $\leqslant k$.

Cum $\eta > 0$ poate fi luat oricît de mic, (34) arată că $H(z)$ este aici un polinom de grad cel mult egal cu ρ.

19. Se deduce imediat de aici că orice funcție întreagă de ordin finit ρ se poate scrie

$$G(z) = e^{Q(z)} \cdot z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}, \qquad (35)$$

unde $Q(z)$ este un polinom, iar p are semnificația reamintită în § 18.

Cum exponentul de convergență ρ_1 al zerourilor este, și el, cel mult egal cu ρ, iar gradul q al lui $Q(z)$ este tocmai ordinul factorului exponențial din (35), se vede că, în (35), atît ordinul produsului canonic, cît și cel al factorului exponențial sînt cel mult egale cu ρ.

Pe de altă parte, ρ nu poate fi mai mare decît cel mai mare dintre q și ρ_1, deoarece, de la r suficient de mare înainte, avem

$$\max_{|z|=r} |G(z)| < e^{r^{q+\varepsilon}} \cdot e^{r^{\rho_1+\varepsilon}} < e^{r^{\rho'+\varepsilon}},$$

unde ρ' este un număr oarecare superior lui q și lui ρ_1

Prin urmare, $\rho \leqslant \rho'$ și deci *ordinul unei funcții întregi, date sub forma* (35), *este egal cu cel mai mare dintre gradul lui* $Q(z)$ *și exponentul de convergență al zerourilor funcției.*

Dacă $\rho_1 < q$, funcția este neapărat de ordin întreg.

Orice funcție întreagă de ordin finit care nu este polinom și care ia o anumită valoare b numai de un număr finit de ori (adică pentru care $G(z) - b = 0$ are un număr finit de soluții) *este de ordin întreg.*

Într-adevăr, funcția $G(z) - b$, care are evident același ordin ca și $G(z)$, are atunci un număr finit de zerouri. Descompunerea ei în factori (35) va prezenta deci un produs canonic finit și deci $\rho_1 = 0$. Dar cum $G(z)$ nu este un polinom, gradul q al lui $Q(z)$ este > 0.

Deci, $\rho = q$.

Reciproca nu este adevărată : o funcție de ordin întreg nu ia neapărat o anumită valoare numai de un număr finit de ori.

Am văzut de exemplu că $\sin z$ este de ordinul 1 ; or, ecuația $\sin z - b = 0$ are întotdeauna o infinitate de soluții.

20. Exponentul de convergență al unui șir de cantități complexe

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{36}$$

care are ca singur punct de acumulare ∞, măsoară, după cum am mai observat, «densitatea» răspîndirii punctelor (36) în plan.

Dacă luăm ca șir (36) șirul soluțiilor lui

$$G(z) - b = 0, \tag{37}$$

unde b este o cantitate complexă finită oarecare dată, se pune întrebarea : ce relații există între diverșii exponenți de convergență ρ_b ai diverselor șiruri (36) corespunzînd diverselor valori b?

Am observat, în § 10, că oricare ar fi b, acest ρ_b nu poate depăși ordinul ρ al lui $G(z)$.

Teorema următoare, datorită lui E. B o r e l, precizează în mod considerabil acest rezultat.

T e o r e m ă. *Dacă* $G(z)$ *este de ordin finit* ρ, *nu poate exista decît cel mult o singură valoare* b, *pentru care* $\rho_b < \rho$.

Pentru toți ceilalți b avem deci $\rho_b = \rho$.

Să presupunem, într-adevăr, că ar exista două valori b_1 și b_2 ($b_1 \neq b_2$), pentru care exponenții de convergență respectivi ρ_1 și ρ_2 ar fi ambii $< \rho$.

Atunci, după cele arătate în paragraful precedent, avem

$$\begin{aligned} G(z) - b_1 &= e^{Q_1(z)} g_1(z) \\ G(z) - b_2 &= e^{Q_2(z)} g_2(z), \end{aligned} \tag{38}$$

ordinul lui g_1 și al lui g_2 fiind respectiv ρ_1 și ρ_2, iar $Q_1(z)$ și $Q_2(z)$ fiind polinoame de gradul ρ (ρ este aici neapărat un număr întreg, din cauza ipotezei noastre).

Din (38) se obține

$$e^{Q_1(z)} g_1(z) - e^{Q_2(z)} g_2(z) = b_2 - b_1$$

și, prin derivarea acesteia,

$$e^{Q_1(z)} [Q_1'(z) g_1(z) + g_1'(z)] - e^{Q_2(z)} [Q_2'(z) g_2(z) + g_2'(z)] = 0.$$

Pentru ca acest sistem liniar în $e^{Q_1(z)}$ și $e^{Q_2(z)}$ să fie compatibil, trebuie să avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ Q_1' g_1 + g_1' & Q_2' g_2 + g_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

sau

$$Q_1' g_1 + g_1' = Q_2' g_2 + g_2' = 0.$$

Acestea din urmă dau

$$e^{-Q_1} = C_1 g_1 \quad \text{și} \quad e^{-Q_2} = C_2 g_2,$$

cu C_1 și C_2 constante.

Or, aceasta contrazice faptul că g_1 și g_2 sînt de ordin ρ_1 și ρ_2, ambii inferiori ordinului ρ al primilor membri.

Deci, $\Delta \neq 0$ și avem

$$e^{Q_1(z)} = \frac{(b_1 - b_2)[Q_2' g_2 + g_2']}{\Delta}, \quad e^{Q_2(z)} = \frac{(b_2 - b_1)[Q_1' g_1 + g_1']}{\Delta}. \tag{39}$$

Dar derivata unei funcții întregi are același ordin ca și funcția însăși*.

---

* Într-adevăr, fie $M(r)$ și $M_1(r)$ funcțiile corespunzătoare lui $G(z)$ și $G'(z)$. Avem, după formulele lui Cauchy (cap. III, § 39 și 46) aplicate la cercul $|z| = 2r$,

$$M_1(r) < \frac{2M(2r)}{r},$$

iar din relația

$$G(z) = c_0 + \int_0^z G'(\zeta)\, d\zeta,$$

deducem

$$M(r) < |c_0| + rM_1(r)$$

deci

$$\frac{M(r)}{r} - \frac{|c_0|}{r} < M_1(r) < \frac{2M(2r)}{r},$$

ceea ce arată că ordinul este același pentru $G(z)$ și $G'(z)$.

Pe de altă parte, atît numărătorii cît și numitorii din (39) sînt funcții întregi de ordin cel mult egal cu cel mai mare dintre ρ_1 și ρ_2, deci de ordin $< \rho$. Cîtul lor, dacă este funcție întreagă [ca în (39)], nu poate fi decît de ordin, și el, $< \rho$. Aceasta însă contrazice faptul că gradul lui Q_1 și al lui Q_2 este ρ.

Deci, relațiile (38) sînt imposibile simultan și teorema este demonstrată.

21. Teorema lui Borel este caracteristică pentru genul de rezultate care constituie teoria repartiției valorilor funcțiilor analitice.

În particular, ea arată că nu poate exista decît cel mult *o singură* valoare finită b, astfel ca ecuația $G(z) - b = 0$ să nu aibă decît un număr finit de zerouri, sau să nu aibă zerouri de loc.

În cazurile acestea, se spune că b este o *valoare excepțională* în sensul lui Picard, pentru că, sub forma aceasta, rezultatul este un caz particular al unei celebre teoreme a lui Picard, pe care o vom întîlni mai tîrziu.

Se vede însă că, în cazul de mai sus al funcțiilor de ordin finit, introducerea valorilor excepționale în sensul lui E. Borel constituie o adîncire a studiului repartiției punctelor în care este luată o valoare dată.

Pe de altă parte, E. Borel a arătat că teorema sa subzistă și pentru funcții întregi de ordin infinit.

Fără a insista aici asupra diverselor extensiuni ale teoremei precedente*, să observăm numai că raționamentul folosit permite să se stabilească și următorul fapt, mai general, care pune bine în evidență rolul ordinului în distribuția valorilor:

Dacă $G(z)$ este o funcție întreagă de ordinul ρ, nu pot exista două funcții întregi distincte $\varphi_1(z)$ și $\varphi_2(z)$ de ordin $< \rho$ și astfel ca exponentul de convergență al zerourilor fiecăreia din ecuațiile

$$G(z) - \varphi_1(z) = 0$$

$$G(z) - \varphi_2(z) = 0$$

să fie inferior lui ρ.

Rolul constantelor b_1 și b_2 este, așadar, preluat aici de funcțiile întregi *de ordin inferior ordinului lui $G(z)$*.

În particular, dacă $\rho > 0$, φ_1 și φ_2 ar putea fi polinoame de un grad oarecare.

Extensiunile de felul acesta ale teoremei lui Borel arată limpede poziția funcțiilor de un ordin dat, față de funcțiile de ordin superior.

Vom studia acum, în capitolul următor, funcții uniforme mai generale decît funcțiile întregi și meromorfe, căutînd să urmăm, pe cît posibil, aceleași idei generale.

---

* O asemenea extensiune se datorează lui G. Călugăreanu, care cu această ocazie a pus în evidență și valori excepționale de un alt tip („Mathematica", 1931, t. VI, p. 25).

CAPITOLUL IX

FUNCȚII UNIFORME, SINGULARITĂȚI, DOMENIU DE EXISTENȚĂ

Funcțiile uniforme generale pot admite singularități și mulțimi singulare foarte variate. Ele formează obiectul unor capitole speciale, din care vom întîlni unele în volumele următoare ale acestui tratat. Ne vom mărgini a da aici cîteva fapte și principii generale, precum și unele considerații asupra domeniilor de existență ale funcțiilor uniforme.

I. FUNCȚII MĂRGINITE ÎNTR-UN CERC

1. Printre funcțiile mai generale decît cele meromorfe în planul întreg, o clasă importantă o constituie acele funcții olomorfe în $|z|<R$ care sînt mărginite în acest domeniu.

Se cunosc proprietăți importante ale acestei clase de funcții al căror studiu sistematic se poate spune că începe cu memoriul lui P. F a t o u, apărut în *Acta mathematica*, în 1906. Acest studiu înglobează azi de obicei și pe acela al clasei mai vaste a funcțiilor meromorfe în $|z|<R$, care sînt cîturi de funcții olomorfe mărginite.

Ca și teoria generală a funcțiilor meromorfe în planul întreg, și această din urmă teorie își trage ideile ei esențiale din studiul prealabil al funcțiilor olomorfe și mărginite în cerc, teorie care joacă, față de ea, un rol analog cu cel al teoriei funcțiilor întregi față de teoria funcțiilor meromorfe în tot planul. Pentru aceste motive, vom da aici cîteva noțiuni generale, pentru a ne putea da seama de modul cum se pun problemele, precum și de deosebirile dintre acest caz și acela al planului întreg.

2. Să considerăm o funcție $f(z)$, olomorfă și mărginită într-un cerc din (z).

Este clar că, fără a restrînge în nici un fel generalitatea, putem presupune că cercul este $|z|<1$ și că, în acest cerc, avem $|f(z)|<1$, înlocuirea lui z printr-o funcție liniară de z și a lui $f(z)$ prin $\frac{f(z)}{M}$ aducîndu-ne imediat la acest caz.

Putem presupune de asemenea că $f(0)\neq 0$, împărțind la nevoie cu z^m.

Considerăm, așadar, o funcție $f(z)$, satisfăcînd următoarele condiții:

1° $f(z)$ este olomorfă în $|z| < 1$;
2° avem $|f(z)| < 1$ în $|z| < 1$;
3° $f(0) \neq 0$.
Fie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

toate zerourile lui $f(z)$ din $|z| < 1$; să le presupunem așezate în ordinea modulelor lor nedescrescătoare. Să scriem

$$R(z) = \left(\frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z}\right)\left(\frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}\right)\ldots\left(\frac{z - a_n}{1 - \bar{a}_n z}\right). \tag{2}$$

Funcția rațională $R(z)$ transformă $|z| \leqslant 1$ în el însuși (cap. III, § 13) și fiecare din factorii care figurează în expresia ei tinde, în modul, uniform către 1 cînd $|z| \to 1$. Așadar, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\eta > 0$ astfel încît, dacă

$$1 - \eta < |z| < 1, \tag{3}$$

avem

$$1 - |R_n(z)| < \varepsilon, \quad \text{adică} \quad |R_n(z)| > 1 - \varepsilon.$$

Deci, dacă relația (3) este satisfăcută, avem

$$\left|\frac{f(z)}{R_n(z)}\right| < \frac{1}{1 - \varepsilon}. \tag{4}$$

Dar funcția $\frac{f(z)}{R_n(z)}$ fiind olomorfă în $|z| < 1$, avem inegalitatea (4) și în interiorul cercului $|z| < 1 - \eta$, astfel încît (4) are loc în tot $|z| < 1$.

Ținînd seama de faptul că $\varepsilon > 0$ este arbitrar, conchidem că în $|z| < 1$ avem

$$\left|\frac{f(z)}{R_n(z)}\right| < 1. \tag{5}$$

Din (5) se deduce

$$|f(0)| < |R_n(0)| = r_1 r_2 \ldots r_n = \prod_{k=1}^{n} r_k, \tag{6}$$

cu $r_k = |a_k|$.

Cum $|a_k| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} r_k$ există și este $\geqslant 0$.

Dar $|f(0)| \neq 0$, deci (6) arată că această limită este > 0.
Produsul infinit

$$\prod_{k=1}^{\infty} r_k = \prod_{k=1}^{\infty} [1 - (1 - r_k)]$$

este deci absolut convergent și, prin urmare, seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - r_k) \tag{7}$$

este convergentă.

Prin urmare, zerourile a_k ale unei funcții olomorfe și mărginite în $|z| < 1$ trebuie să satisfacă condiția ca produsul infinit (7) [unde $r_k = |a_k|$] să fie convergent.

3. Vom arăta acum și reciproca acestei propoziții.

Plecînd de la un sir $\{a_k\}$ cu $|a_k| < 1$ și pentru care (7) este convergent, vom construi o funcție olomorfă și mărginită în $|z| < 1$, avînd ca zerouri punctele a_k.

Să considerăm pentru aceasta produsul infinit

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}\right) \frac{r_k}{a_k}. \tag{8}$$

Factorul său general se scrie

$$1 + \left[\left(\frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}\right) \frac{r_k}{a_k} - 1\right] = 1 + u_k$$

și vom arăta că seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{9}$$

este absolut și uniform convergentă în $|z| < \rho < 1$.

Avem

$$u_k = \frac{(a_k - z)\frac{r_k}{a_k} - 1 + \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z}$$

și punînd

$$a_k = r_k e^{i\theta_k},$$

obținem

$$u_k = \frac{(r_k - 1) + z e^{-i\theta_k}(r_k - 1)}{1 - z r_k e^{-i\theta_k}}.$$

Dacă $|z| < \rho < 1$, avem deci

$$|u_k| < (1 - r_k) \frac{1 + \rho}{1 - \rho},$$

deoarece $r_k < 1$.

Prin urmare, (7) fiind convergent prin ipoteză, seria (9) este absolut și uniform convergentă în $|z| < \rho$.

Produsul infinit (8) reprezintă deci o funcție olomorfă în $|z| < 1$. Modulul acestei funcții este, în acest cerc, evident < 1.

Prin urmare,

T e o r e m ă. *Condiția necesară și suficientă pentru ca șirul*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

de puncte din $|z| < 1$ *să fie mulțimea zerourilor din* $|z| < 1$ *ale unei funcții olomorfe și mărginite în* $|z| < 1$ *este ca seria*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - r_k),$$

cu $r_k = |a_k|$, *să fie convergentă**.

Să observăm că teorema aceasta, datorită lui W. B l a s c h k e, dă nu numai o caracterizare a mulțimii zerourilor unei funcții olomorfe în cercul $|z| < 1$, dar și o reprezentare a funcției în acest cerc, cu ajutorul produsului infinit (8).

Fie într-adevăr $g(z)$ funcția reprezentată prin (8), acest produs fiind format cu zerourile care nu sînt în origine ale unei funcții date $f(z)$ olomorfe și mărginite în $|z| < 1$.

Dacă $f(0) = 0$, vom lua pentru $g(z)$ produsul infinit (8) înmulțit cu z^m (m fiind ordinul zeroului din origine).

Funcția $\frac{f}{g}$ este olomorfă în $|z| < 1$ și nu se anulează în acest cerc.

Avem deci,

$$f(z) = e^{H(z)} z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \right) \frac{r_k}{a_k}, \tag{10}$$

unde $H(z)$ este olomorfă în $|z| < 1$.

Dacă avem $|f(z)| < 1$ în $|z| < 1$, inegalitatea (5) arată că $|f/g| < 1$ și deci că partea reală a lui $H(z)$ trebuie să fie $\leqslant 0$ în $|z| < 1$.

4. Teorema din paragraful precedent arată că faptul că funcția $f(z)$ este olomorfă și mărginită într-un cerc atrage după sine o anumită rapiditate pentru modul cum modulele r_n ale zerourilor funcției tind către raza cercului, în cazul cînd aceste zerouri sînt în număr infinit.

Dacă zerourile funcției $f(z)$ ar fi în număr finit în cercul dat, produsul din (10) ar fi un produs finit, și anume o funcție rațională de z care transformă cercul în el însuși.

Se observă analogia acestor fapte cu unele din rezultatele obținute în capitolul precedent relative la funcțiile întregi. Ele nu presupun însă nimic asupra modului cum se comportă funcția $f(z)$ în afara domeniului $|z| < 1$.

* Bineînțeles că, dacă funcția se anulează în origine, șirul din enunțul de mai sus cuprinde numai zerourile care nu sînt în origine.

În particular, circumferința $|z| = 1$ ar putea fi o linie singulară pentru $f(z)$, tot astfel după cum $f(z)$ ar putea fi funcție rațională sau o funcție care admite numai unele puncte singulare izolate pe $|z| = 1$.

Important este însă faptul că reprezentarea (10) este valabilă pentru *orice* funcție din clasa considerată.

II. PRINCIPIUL LUI PHRAGMEN ȘI LINDELÖF

E. Phragmen și E. Lindelöf au dat o generalizare foarte importantă teoremei maximului modulului considerată sub forma din capitolul II, § 28, generalizare care dă loc la numeroase aplicații în studiul funcțiilor în vecinătatea unei singularități.

5. Fie D un domeniu oarecare și $f(z)$ o funcție olomorfă în D.

Spunem că $f(z)$ (care nu are nevoie să fie definită în punctele frontieră ζ ale lui D) este *mărginită de orice număr superior constantei C într-un asemenea punct* ζ, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un cerc γ, cu centrul în ζ, astfel încît, dacă $z \in D$ este în interiorul lui γ, avem $|f(z)| < C + \varepsilon$.

În cazul cînd ζ ar fi punctul ∞, în această definiție ceea ce privește pe γ și pe z trebuie înlocuit prin: există un cerc γ, cu centrul în origine, astfel că, dacă $z \in D$ este în exteriorul acestui cerc, avem inegalitatea $|f(z)| < C + \varepsilon$.

Bineînțeles că, în general, cercul γ depinde de ζ și de ε.

Cu această definiție se formulează, după cum urmează, teorema cunoscută sub numele de:

Principiul lui Phragmen și Lindelöf. *Dacă $f(z)$ este olomorfă în D și mărginită de orice număr superior constantei C în orice punct al frontierei lui D, atunci, în orice punct z din D, avem*

$$|f(z)| \leqslant C. \tag{11}$$

Se știe că imaginea $f(D)$ a lui D este un domeniu Δ din planul (u) (cap. II, § 24).

Totul revine la a arăta că Δ este cuprins în $|u| \leqslant C$, adică a arăta că nici un punct al lui Δ nu se găsește în $|u| > C$.

Cum $f(z)$ este olomorfă în D, este sigur că Δ nu cuprinde punctul $u = \infty$ și deci Δ are puncte frontieră.

Este deci suficient să arătăm că nici un punct frontieră al lui Δ nu poate fi în $|u| > C$, deoarece dacă un punct interior al lui Δ s-ar afla în această regiune a planului (u), ar exista și un punct frontieră în această regiune.

Să presupunem deci că ar exista un astfel de punct β, cu $|\beta| > C$. Cum β este punct frontieră al lui Δ, există un șir de puncte distincte $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, aparținînd lui Δ și tinzînd către β, cînd $n \to \infty$.

Fiecărui u_n îi corespunde cel puțin un $z_n \in D$, astfel ca $u_n = f(z_n)$.

Să alegem pentru fiecare u_n un astfel de z_n. Toți acești z_n sînt distincți.

Presupunem mai întîi că șirul $\{z_n\}$ al punctelor astfel alese are un punct de acumulare α la distanță finită (ceea ce este cazul, de exemplu, dacă șirul $\{z_n\}$ este mărginit).

Punctul α nu poate fi în D, unde $f(z)$ este olomorfă, deoarece atunci $f(\alpha) = \beta \in \Delta$; or, β este pe frontiera lui Δ și acesta fiind o mulțime deschisă nu poate conține nici un punct frontieră al său.

Deci α este pe frontiera lui D.

Dar atunci există conform ipotezei un cerc γ_α, cu centrul în α, astfel încît dacă $z_n \in \gamma_\alpha D$, avem

$$|u_n| = |f(z_n)| < C + \varepsilon, \tag{12}$$

$\varepsilon > 0$ fiind dat arbitrar.

Deci, pentru subșirul lui $\{z_n\}$ care tinde către α, inegalitatea (12) este satisfăcută și, prin urmare, la limită, avem

$$|\beta| \leqslant C + \varepsilon \tag{13}$$

Dar ε poate fi luat oricît de mic.

Deci nu putem avea inegalitatea $|\beta| > C$.

Dacă șirul $\{z_n\}$ nu are punct de acumulare la distanță finită, el este nemărginit și $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, iar punctul ∞ este în interiorul lui D sau pe frontiera sa. Dar $f(z)$ este olomorfă în D, deci ∞ nu poate fi în interiorul lui D, pentru aceleași motive ca mai sus.

Punctul ∞ este deci pe frontiera lui D.

Dar atunci, conform ipotezei (și ținînd seama de definiția din § 5), inegalitatea (12) rămîne valabilă de la un n destul de mare înainte, în exteriorul unui anumit cerc γ cu centrul în origine; deci și inegalitatea (13).

Punctul β nu poate fi, așadar, exterior lui $|u| \leqslant C$ și principiul enunțat mai sus este demonstrat.

Observație. Se vede îndată, din teorema maximului modulului, că dacă într-un punct $z_0 \in D$ avem $|f(z_0)| = C$, atunci $f(z)$ este o constantă de modul C.

6. Principiul lui Phragmen-Lindelöf permite numeroase și variate extensiuni ale teoremei maximului modulului într-un domeniu dat (cap. II, § 26), la cazuri cînd pe frontiera domeniului există puncte sau mulțimi excepționale, în care nu se cunoaște decît parțial comportarea funcției.

Vom da aici pe una din cele mai importante.

Teoremă generală. *Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în D domeniu simplu conex, funcție mărginită de orice număr superior lui C (în sensul precizat în paragraful precedent) în orice punct al frontierei lui D în afară de punctele unei anumite mulțimi E de pe această frontieră.*

Să presupunem că există o funcție $\omega(z)$ care satisface următoarele condiții:

1° *$\omega(z)$ este olomorfă în D;*

2° *$|\omega(z)| < 1$ în D;*

3° *$\omega(z) \neq 0$ în D;*

4° *Pentru orice număr real pozitiv σ, funcția*

$$|\omega(z)|^\sigma \cdot |f(z)|$$

este mărginită, în orice punct al mulțimii E de pe frontiera lui D, de orice număr superior lui C.

În aceste condiții se poate afirma că în tot domeniul avem

$$|f(z)| \leqslant C.$$

Să considerăm funcția

$$[\omega(z)]^{\sigma} \cdot f(z).$$

Cum D este simplu conex, această funcție este uniformă și olomorfă în D, oricare ar fi σ.

Se constată îndată că ea satisface, în D, condițiile din principiul lui Phragmen-Lindelöf și deci putem afirma că în orice punct $z \in D$ avem

$$|\omega(z)|^{\sigma} \cdot |f(z)| \leqslant C.$$

Dar cum această inegalitate are loc pentru orice $\sigma > 0$, avem, în orice punct $z \in D$, făcînd $\sigma \to 0$.

$$|f(z)| \leqslant C.$$

Ca și mai sus, dacă egalitatea are loc într-un singur punct din D, $f(z)$ este o constantă de modul C*.

7. Particularizînd mulțimea E și domeniul D, această teoremă generală, dedusă direct din principiul lui Phragmen-Lindelöf, dă loc la aplicații importante.

Să presupunem domeniul D, mărginit, iar mulțimea E redusă la o mulțime finită de puncte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ de pe frontiera lui D. Să presupunem că $f(z)$ este *mărginită* în vecinătatea acestor puncte, cu alte cuvinte că în cercuri cu centrul în ζ_k $(k = 1,2,\ldots,m)$ suficient de mici avem $|f(z)| < M$.

În celelalte puncte ale frontierei lui D, $f(z)$ este presupusă mărginită de orice număr superior constantei C.

În aceste condiții vom arăta că, în tot D, avem

$$|f(z)| \leqslant C.$$

Pentru a aplica teorema generală din paragraful precedent, vom alege drept funcție $\omega(z)$ o funcție de forma

$$\omega(z) = \mu(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \ldots (z - \zeta_m), \tag{14}$$

adică un polinom cu rădăcinile în ζ_k.

Cum D este mărginit, putem lua constanta μ astfel ca, în D, modulul funcției (14) să fie < 1.

În D ea nu se anulează; ea satisface deci condițiile 1°—3°.

---

* Să observăm că în tot raționamentul de mai sus neintervenind decît *modulul* lui $f(z)$, ar fi fost suficient să presupunem numai *modulul uniform în D*, ceea ce permite renunțarea la condiția ca D să fie simplu conex. Nu vom avea însă aici ocazia de a face uz de această generalizare.

În ceea ce privește condiția 4°, ea este satisfăcută în baza ipotezei că $f(z)$ este mărginită în vecinătatea punctelor ζ_k.

Avem într-adevăr, cu $\omega(z)$ din (14),

$$\lim_{z \to \zeta_k} | \omega (z) |^{\sigma} \cdot | f (z) | = 0.$$

Teorema generală se aplică deci cazului nostru și duce la propoziția de mai sus care constituie o extensiune, adesea utilă, a teoremei maximului modulului în interiorul unui domeniu.

8. O aplicație de natură puțin diferită se obține în modul următor:

Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în interiorul unui unghi

$$-\frac{\lambda\pi}{2} < \arg z < \frac{\lambda\pi}{2}, \tag{15}$$

unde λ este un număr pozitiv.

Să presupunem că:

1° În orice punct la distanță finită de pe laturile unghiului definit prin (15) $f(z)$ este mărginită de orice număr superior constantei C.

2° În domeniul unghiular (15), avem

$$| f (z) | < e^{r^k},$$

unde k este un număr pozitiv *inferior* lui $\frac{1}{\lambda}$.

Vom arăta că, *în aceste condiții, avem, în tot domeniul unghiular* (15),

$$| f (z) | \leqslant C.$$

Fie într-adevăr k' un număr pozitiv, ales astfel încît să avem

$$k < k' < \frac{1}{\lambda}. \tag{16}$$

Pentru aplicarea teoremei generale din § 6, putem lua

$$\omega (z) = e^{-z^{k'}}. \tag{17}$$

Într-adevăr, dacă $\varphi = \arg z$, avem

$$| e^{-z^{k'}} | = e^{-r^{k'} \cos k'\varphi}$$

și deci, în baza ipotezei 2° de mai sus,

$$| \omega (z) |^{\sigma} \cdot | f(z) | < e^{-\sigma r^{k'} \cos k'\varphi + r^k}.$$

Or, în domeniul unghiular, avem, în baza celei de-a doua inegalități (16),

$$k'\varphi < k'\lambda \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2},$$

ceea ce arată că, în acest domeniu, $\cos k'\varphi$ rămîne superior unui număr pozitiv fix μ. Deci

$$|\omega(z)|^{\sigma}|f(z)| < e^{-\sigma r^{k'}\mu + r^{k}}.$$

Dar, în baza primei inegalități (16), membrul al doilea tinde către zero cînd $r \to \infty$, pentru orice σ pozitiv. Deci condiția 4° a lui $\omega(z)$ din § 6 este satisfăcută pentru punctul ∞ al frontierei domeniului unghiular. Pe de altă parte, se vede îndată că $\omega(z)$, din (17), satisface condițiile 1°—3° în acest domeniu.

Funcția $f(z)$, fiind mărginită de orice număr superior lui C, în orice punct la distanță finită de pe laturile unghiului, teorema din § 6 dă imediat $|f(z)| \leqslant C$, în tot domeniul unghiular.

9. Este ușor de văzut că unghiul definit prin inegalitățile (15) poate fi luat cu o poziție oarecare în plan. Ajunge să facem o schimbare de variabilă

$$z = z'e^{\theta i} + a,$$

alegînd cantitatea complexă a și numărul real θ în mod convenabil, pentru a fi aduși la cazul precedent. Această schimbare de variabilă nu modifică valoarea unghiului, deci nu modifică pe λ, iar k din ipoteza 2° rămîne inferior lui $\frac{1}{\lambda}$.

De aici, următoarea teoremă a lui Phragmen și Lindelöf:

Dată fiind o funcție $f(z)$, olomorfă în interiorul unui unghi de deschidere $\lambda\pi$, mărginită de orice număr superior constantei C în orice punct la distanță finită de pe laturile unghiului,

1° *sau, în tot interiorul unghiului, avem*

$$|f(z)| < C$$

pentru orice z,

2° *sau există, pentru orice număr pozitiv $k < \frac{1}{\lambda}$, un șir de valori pozitive r_n, tinzînd către infinit cu n, pentru care avem*

$$\max_{|z|=r_n} |f(z)| > e^{r_n^k}. \tag{18}$$

Aceasta înseamnă că dacă funcția $f(z)$ nu crește destul de repede în unghiul dat (această iuțeală minimă fiind determinată de deschiderea unghiului), atunci ea este mărginită de constanta C în tot interiorul unghiului*.

10. Aplicație la funcțiile întregi. Forma teoremei precedente duce, în mod firesc, la ideea de a o aplica funcțiilor întregi.

Se obțin efectiv, în acest mod, importante proprietăți ale acestora.

Să luăm $\lambda = 2$ în propoziția din paragraful precedent.

---

* Teorema a fost extinsă în mod considerabil de F. și R. Nevanlinna.

A se vedea R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, 1936, ed. 2, 1953.

Atunci, unghiul (presupus cu vîrful în origine) ocupă tot planul și are laturile sale confundate într-o semidreaptă δ, pornind din origine.

Dacă $G(z)$, fiind întreagă, este mărginită pe o semidreaptă δ, se vede din propoziția din paragraful precedent că ea, neputînd fi mărginită în tot planul, trebuie să satisfacă inegalitatea (18), pe un șir de circumferințe $|z| = r_n$, cu $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$, pentru orice $k < \frac{1}{2}$ dat. Dar, dacă funcția este de ordin $< \frac{1}{2}$, aceasta nu este posibil. Prin urmare, o funcție întreagă nu poate fi mărginită pe o semidreaptă δ decît dacă este de ordin $\geqslant \frac{1}{2}$. Această constatare ne duce la o importantă teoremă a lui Wiman, privitoare la funcțiile de ordin $< \frac{1}{2}$.

11. Teorema lui Wiman. Să considerăm o funcție întreagă $G(z)$ de ordin $< \frac{1}{2}$.

Ea se scrie, după cum am văzut în capitolul precedent,

$$G(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

a_n fiind zerourile ei $\neq 0$.

Avem evident

$$\min_{|z|=r} |G(z)| \geqslant r^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{|a_n|}\right).$$

Deci, minimul lui $|G(z)|$ pe $|z| = r$ este cel puțin egal cu valoarea luată în $z = r$ de funcția reală

$$g(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{|a_n|}\right),$$

ale cărei zerouri sînt toate pe axa reală pozitivă.

Dar, după cele spuse în paragraful precedent, funcția întreagă $g(z)$ nu poate fi mărginită pe axa reală pozitivă.

Există deci un șir de valoari $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ cu $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$, pentru care $|g(z)|$ tinde către ∞ și deci, pentru care și $\min_{|z|=r} |G(z)|$ tinde către ∞ cu n.

Acest rezultat constituie prima parte a teoremei lui Wiman. El arată că, pentru funcțiile întregi de ordin $< \frac{1}{2}$, există șiruri de circumferințe $|z| = r_n$, cu $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$, pe care *minimul* modulului funcției tinde către infinit.

Asemenea fapt nu are loc pentru funcțiile de ordin $\geqslant \frac{1}{2}$.

Exemplul funcției întregi de ordin $\frac{1}{2}$

$$e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}$$

o dovedește.

Pe axa reală negativă, această funcție este mărginită*.

Proprietatea aceasta a funcțiilor de ordin $< \frac{1}{2}$ le distinge de cele de ordin mai mare, apropiindu-le mai mult de polinoame, funcții al căror modul chiar tinde, după cum știm, către ∞ cu r.

12. A doua parte a teoremei lui Wiman dă o evaluare a marginii inferioare a lui $|G(z)|$.

Și acest rezultat se poate obține prin aplicarea teoremei lui Phragmen și Lindelőf.

Să observăm mai întîi că avem

$$\max_{|z|=r} |g(z)| = g(-r),$$

după cum am observat deja că avem

$$\min_{|z|=r} |g(z)| = g(r).$$

Funcția

$$F(z) = g(z)\, e^{-\sigma(-z)^{\varrho-\varepsilon}},$$

unde ρ este ordinul lui $g(z)$ (același cu al lui $G(z)$, aceste funcții avînd același exponent de convergență al zerourilor și fiind ambele produse canonice), ε oarecare >0 și σ pozitiv <1, este uniformă și olomorfă în domeniul D format de planul (z) mai puțin axa reală pozitivă.

Determinarea lui $(-z)^{\varrho-\varepsilon}$, în $F(z)$, va fi aleasă astfel ca factorul exponențial din $F(z)$ să fie pozitiv pe axa reală negativă [adică vom lua pe această axă valoarea reală a lui $(-z)^{\varrho-\varepsilon}$].

Cum ordinul lui $g(z)$ este ρ și maximul modulului său, pentru $|z| = r$, este $g(-r)$, există un șir r_n, tinzînd către ∞ cu n, pentru care

$$g(-r_n) > e^{r_n^{\varrho-\varepsilon}}.$$

Pentru aceste valori avem deci,

$$F(-r_n) > e^{r_n^{\varrho-\varepsilon} - \sigma r_n^{\varrho-\varepsilon}} = e^{r_n^{\varrho-\varepsilon}(1-\sigma)}. \qquad (19)$$

---

* Cititorul va arăta că funcția aceasta este întreagă și de ordin $\frac{1}{2}$ și că, pe axa reală negativă, ea rămîne cuprinsă între $+2$ și -2.

Pe de altă parte, în domeniul D, se poate aplica funcției $F(z)$ raționamentul din § 10 și arăta că dacă $|F(z)|$ este mărginită pe axa reală pozitivă, funcția este mărginită * în tot D $\left(\text{fiind de ordin} < \frac{1}{2}\right)$ și deci și pe axa reală negativă.

Or, pe această axă, (19) arată că $|F(z)|$ nu este mărginită.

Deci, nici pe axa reală pozitivă $|F(z)|$ nu poate fi mărginită și avem, în particular, un șir de valori $r > 0$ tinzînd către infinit pentru care

$$|F(r)| > 1.$$

Or, aceasta înseamnă că, pentru aceste valori r, avem

$$|g(r)| > |e^{\sigma(-r)^{\varrho-\varepsilon}}| = e^{\sigma r^{\varrho-\varepsilon}\cos\pi(\varrho-\varepsilon)},$$

iar cu un $\eta > \varepsilon$,

$$g(r) > e^{r^{\varrho-\eta}}.$$

Cum ε este arbitrar, și η este pozitiv arbitrar.

Dacă ne amintim că $g(r)$ este $\min_{|z|=r} |G(z)|$, avem deci următorul enunț complet al teoremei lui Wiman:

Pentru orice funcție întreagă $G(z)$ de ordin $< \frac{1}{2}$, există un șir r_n tinzînd către ∞ cu n, astfel încît, pe circumferințele $|z| = r_n$, minimul lui $|G(z)|$ tinde către ∞.

În plus, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un astfel de șir, pentru care avem

$$\min_{|z|=r_n} |G(z)| > e^{r_n^{\varrho-\varepsilon}},$$

unde ρ este ordinul lui $G(z)$.

Să observăm că marginea inferioară a lui $|G(z)|$ dată în a doua parte a enunțului este interesantă numai în cazul $\rho > 0$.

A. Wiman a dat o formă mai puțin simplă acestei margini, dar care tinde către ∞ și pentru $\rho = 0$**.

În aceeași ordine de idei menționăm că N. N. Luzin a construit o funcție olomorfă numai în $|z| < 1$, care posedă proprietatea exprimată prin prima parte a acestei teoreme***.

---

* Funcția $F(z)$ are o determinare pe partea superioară a axei reale pozitive și alta pe cea inferioară a acestei axe. Din cauza formei factorului ei exponențial, una din aceste determinări este însă mărginită (sau nemărginită) simultan cu cealaltă determinare.

** A. Wiman, Mathematische Annalen, 1914, t. 76.

*** N. N. Luzin, Buletinul Inst. Polit. din Ivanovo—Vosnesensk, 1922, și N. N. Luzin și I. Privoloff, Annales scientifiques de l'École Normale, 1925.

Această funcție tinde, în mod uniform, către ∞, cînd z tinde către $|z| = 1$, rămînînd în interiorul unor anumite coroane circulare care tind către $|z| = 1$.

Din acest punct de vedere, funcția lui Luzin se aseamănă deci cu funcțiile întregi de ordin mai mic decît $\frac{1}{2}$. De aici rezultă diverse consecințe. Astfel se poate arăta că, pentru o asemenea funcție $f(z)$ olomorfă în $|z| < R$ (R putînd fi finit sau infinit), nu poate exista decît o singură valoare b, astfel ca $f(z) - b$ să nu aibă decît zerouri multiple*.

Funcții simple, ca de exemplu $\sin z$, dar care nu aparțin clasei caracterizate prin proprietatea pe care o exprimă prima parte a teoremei lui Wiman, nu satisfac această condiție; atît $1 + \sin z$ cît și $1 - \sin z$ nu au decît zerouri multiple.

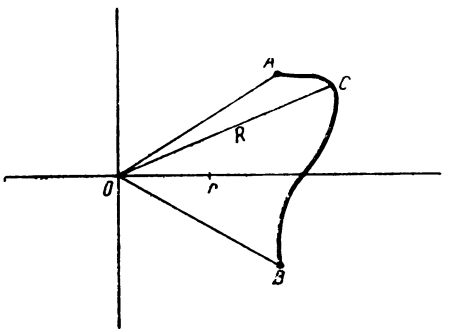


Fig. 25

13. Principiul lui Phragmen și Lindelöf duce de asemenea în mod foarte simplu la o inegalitate datorită lui T. Carleman, căreia îi vom da îndată o aplicație importantă.

Să considerăm un unghi AOB, de deschidere $\lambda\pi$, avînd axa reală pozitivă a planului (z) ca bisectoare, și un arc simplu jordanian ACB unind A cu B, fără a tăia OA sau OB (fig. 25).

Atunci, $OACBO$ este o curbă simplă închisă jordaniană. Fie T domeniul jordanian ce-l limitează, iar R distanța maximă de la O la ABC și $z = r$ un punct pe bisectoarea lui AOB, în interiorul lui T.

Vom demonstra următoarea teoremă:

Teorema lui Carleman. *Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în T, mărginită de orice număr superior lui M pe OA și OB și de orice număr superior lui $m > 0$ pe arcul ACB, cu $m < M$.*

Avem atunci, oricare ar fi $r \in T$,

$$|f(r)| \leqslant M^{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} m^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}. \tag{20}$$

Să considerăm funcția

$$\varphi_\mu(z) = e^{\mu\left(\frac{z}{r}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} f(z), \tag{21}$$

unde μ este o constantă pozitivă.

---

* S. Stoilow, „Compositio Mathematica", 1940, t. VII.

Pe OA avem

$$|e^{\left(\frac{z}{r}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}| = e^{\left(\frac{|z|}{r}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\cos\frac{\pi}{2}} = 1$$

și pe OB, numai $-\frac{\pi}{2}$ luînd locul lui $\frac{\pi}{2}$, aceeași egalitate.

Deci, pe OA și OB, funcția $\varphi_\mu(z)$ este mărginită de orice număr superior lui M.

Pe ACB, aceeași funcție este mărginită de orice număr superior lui $me^{\mu\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$.

După principiul lui Phragmen și Lindelőf, avem deci $|\varphi_\mu(z)| < C$ în orice punct $z \in T$, unde C este cea mai mare din constantele

$$M \text{ și } me^{\mu\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Să determinăm pe μ, astfel ca aceste două constante să fie egale. Vom avea

$$\mu = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \ln\frac{M}{m} > 0$$

și, înlocuind în (21), pentru $z = r$,

$$|f(r)| \leqslant M \cdot \left(\frac{m}{M}\right)^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} = M^{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} m^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\lambda}}},$$

adică tocmai inegalitatea lui Carleman*.

14. Ca o consecință importantă a acestei inegalități, putem da îndată următoarea propoziție, datorită lui P a i n l e v é, care dă informații asupra liniilor singulare:

Dacă o funcție $f(z)$ este olomorfă într-un domeniu jordanian D, a cărui frontieră cuprinde un arc j pe care $f(z)$ tinde uniform către 0 cînd z tinde în D către j, atunci $f(z)$ este identic 0.

Este suficient să construim, în interiorul lui D, un domeniu $D_1 \subsetneq D$ asemănător cu T din paragraful precedent, în care ACB să fie o parte din j, cu vîrful unghiului în interiorul lui D, și să facem apoi o schimbare liniară de variabilă care aduce domeniul D_1 în poziția lui T. O asemenea schimbare de variabilă nu modifică condițiile enunțului de mai sus; $|f(z)|$ este mărginit în D_1 și aplicarea teoremei lui Carleman, în care putem lua pe m oricît de mic, dă îndată $f(r) = 0$ pentru orice punct de pe axa reală pozitivă interior lui D_1 astfel transformat.

Funcția $f(z)$, fiind olomorfă în D, este deci identic nulă.

---

* Inegalitatea obținută poate fi ușor generalizată pentru un punct z oarecare din T. Pentru această chestiune, ca și pentru diverse alte dezvoltări ale principiului lui Phragmen și Lindelőf, se poate vedea G. J u l i a, *Principes géométriques d'Analyse*, Paris, 1932, t. II precum și R. N e v a n l i n n a, *Eindeutige analytische Funktionen*, Springer Verlag, ed. 2, 1953 (Teorema celor două constante).

III. EXTENSIUNEA FUNCȚIEI DE REPREZENTARE CONFORMĂ LA FRONTIERA DOMENIULUI

15. Principiul lui Phragmen și Lindelőf, larg folosit în secțiunea precedentă, ne-a condus la diverse proprietăți ale funcțiilor olomorfe , proprietăți care se referă la vecinătatea frontierei domeniului lor de olomorfie. Or, pe această frontieră se pot afla puncte și mulțimi de puncte singulare, astfel încît aceste proprietăți ne informează asupra comportării funcțiilor în vecinătatea singularităților lor de diferite tipuri.

În general, diversele domenii de olomorfie considerate în secțiunea precedentă aveau forme particulare, circulare sau unghiulare. Grație teoremei fundamentale a reprezentării conforme, demonstrată în capitolul V, ne este însă posibil să transpunem rezultatele obținute pentru asemenea domenii și la altele cu mult mai generale. Pentru aceasta este însă necesar să examinăm felul cum se comportă funcția de reprezentare conformă în vecinătatea frontierei domeniului reprezentat, pentru a putea folosi, în scopul urmărit aici, schimbarea de variabilă pe care o oferă această funcție.

Studiul acesta a fost făcut pentru prima oară în toată generalitatea sa de către C. Carathéodory *.

În cazul general, cercetarea lui C. Carathéodory duce la o analiză adîncă a frontierei unui domeniu oarecare, analiză de o deosebită importanță, atît în topologia planului, cît și în unele cercetări speciale de teoria funcțiilor. Ne vom mărgini însă aici la domeniile jordaniene, caz suficient de general pentru toate aplicațiile pe care le vom da în acest volum **.

16. Fie D un domeniu jordanian și C curba simplă închisă care este frontiera lui D.

Să notăm, ca de obicei, $\overline{D} = D + C$, numind $\overline{D}$ «domeniul închis».

În baza teoremei lui Riemann, demonstrată în capitolul V, există o funcție olomorfă și univalentă în D care reprezintă conform domeniul D, interiorul lui $\overline{D}$, pe D', interiorul unui alt domeniu jordanian închis $\overline{D}' = D' + C'$.

Este vorba acum să examinăm comportarea în vecinătatea lui C a acestei funcții definite numai în D, în vederea extinderii ei la $\overline{D}$.

Rezultatul pe care îl avem în vedere se formulează astfel :

Teoremă. *Reprezentarea conformă între două domenii jordaniene se extinde în mod biunivoc și bicontinuu la frontierele lor, stabilind o transformare topologică între cele două domenii închise.*

Înainte de a trece la demonstrația teoremei vom da două leme topologice necesare.

17. Lema I. *Oricare ar fi punctul P pe conturul C al lui $\overline{D}$, există în orice cerc γ, cu centrul în P, un domeniu jordanian $d \subset D$ (și deci $\overline{d} \subset \overline{D}$) a cărui frontieră este compusă dintr-un arc c_1 al lui C, care conține pe P, și de un alt arc c_2, interior lui D, care își are numai extremitățile pe C (fig. 26).*

---

* C. Carathéodory, „Mathematische Annalen", 1913, t. 73, p. 305.

** În cazul cînd frontiera este o curbă jordaniană rectificabilă, funcția de reprezentare conformă a fost studiată în mod mai amănunțit de Alex. Ghika (a se vedea de exemplu „Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences de Roumanie",1938, t. II și 1942, t. VI).

Dacă ne referim la teorema generală enunțată în capitolul I, § 20, proprietatea apare imediat. Cercul γ are ca imagine, în planul transformat, o curbă închisă jordaniană J, care taie într-un număr oarecare de puncte imaginea circulară Γ a lui C. În interiorul acestei curbe J, se află un arc al circumferinței lui Γ, care conține imaginea Q a lui P. Un arc de cerc destul de mic, interior cercului Γ în jurul lui Q, determină atunci, dacă ne înapoiem la planul inițial, porțiunea interioară c_2 a frontierei lui d.

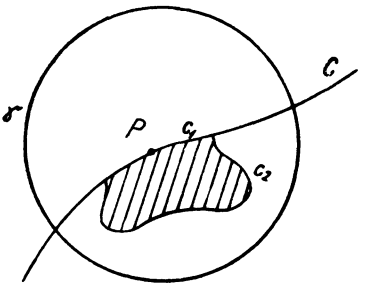


Fig. 26

18. Lema II. *Fiind date o infinitate de continuuri compacte* $K_1, K_2, \ldots$ (cap. I, § 12 și 14), *astfel ca* $K_n \supset K_{n+1}$, *intersecția* $\bigcap_n K_n$ *este un continuu sau un punct unic.*

Este clar mai întîi că $\bigcap_n K_n$ nu este vidă, K_n fiind compacte *.

Fie $E = \bigcap_n K_n$.

După teoremele generale relative la operații între mulțimi închise, E este mulțime închisă. Rămîne de arătat că, dacă conține mai mult de un singur punct, E este un continuu, adică este și mulțime conexă.

Dacă E nu ar fi conexă, ar exista două mulțini E_1 și E_2 satisfăcînd simultan condițiile (cap. I, § 13):

$$E_1 \neq 0,\ E_2 \neq 0,\ E_1 + E_2 = E,\ E_1E_2 = 0,\ E'_1E_2 = 0,\ E_1E'_2 = 0. \quad (22)$$

Cum E este închisă, aceste condiții arată că E_1 și E_2 sînt și ele închise. Pe de altă parte, ele sînt mărginite, fiind cuprinse în E.

Între E_1 și E_2, care nu au un punct comun și sînt închise și mărginite, există o distanță minimă pozitivă δ a punctelor lor respective **.

Să acoperim E_1, ca și E_2, cu cercuri avînd centrele lor în punctele acestor mulțimi și raze $< \frac{\delta}{2}$. Fie G_1 reuniunea cercurilor cu centrele pe E_1 și G_2 reuniunea cercurilor cu centrele pe E_2. G_1 și G_2 sînt mulțimi deschise și disjuncte. Mulțimile $L_n = K_n - (G_1 + G_2)$ sînt compacte și $L_n \supset L_{n+1}$. Dacă toate mulțimile L_n ar fi nevide, intersecția lor ar fi nevidă, ceea ce este absurd, întrucît ea este conținută în același timp în $G_1 + G_2$ și în complementara lui $G_1 + G_2$. Prin urmare, există n cu $K_n - (G_1 + G_2) = \phi$, ceea ce este echivalent cu $K_n \subset G_1 + G_2$. Mulțimea K_n fiind conexă, deducem $K_n \subset G_1$ sau $K_n \subset G_2$. În primul caz conchidem $E_2 \subset E \subset K_n \subset G_1$, iar în al doilea $E_1 \subset E \subset K_n \subset G_2$; ambele concluzii sînt însă absurde.

E este deci un continuu sau se reduce la un singur punct.

19. Fie $z' = \varphi(z)$ funcția de reprezentare conformă a lui D pe D'.

---

* O infinitate de mulțimi compacte K_n cu $K_n \supset K_{n+1}$ au cel puțin un punct comun. Într-adevăr, ajunge să alegem cîte un punct $p_n \in K_n$. Dacă $\{p_n\}$ este mulțime finită, unul din aceste puncte se află în toți K_n. Dacă ea este infinită, ea are un punct de acumulare care este al tuturor K_n. El se află deci în toți K_n, aceștia fiind mulțimi închise

** Aceasta se demonstrează fără nici o dificultate. Cititorul va face singur demonstrația, aplicînd proprietățile mulțimilor mărginite și închise.

Orice șir de puncte $\{z_n\}$ tinzînd către C are ca imagine un șir $\{z'_n\}$ tinzînd către C'.

În mod precis, dacă distanța de la z_n la C tinde către *zero*, distanța de la z_n la C' tinde și ea către zero *.

Într-adevăr, dacă nu ar fi astfel, ar exista pentru $\{z'_n\}$ un punct de acumulare în interiorul lui D'. Imaginea acestuia prin φ^{-1} fiind însă în D, $\varphi^{-1}(z')$ nu ar mai fi continuă în acest punct, contrar ipotezei că φ^{-1} este olomorfă în D'.

Fie acum P un punct pe C și $\{z_n\}$ un șir care tinde către P în D.

După lema I, există în orice cerc γ, cu centrul în P, un domeniu $d \subset D$, în interiorul căruia, de la un n suficient de mare înainte, va fi cuprins z_n.

Fie d' imaginea lui d prin $z' = \varphi(z)$.

d' este un domeniu (cap. II, § 24) și frontiera sa trebuie să cuprindă puncte din C', pentru că $z'_n = \varphi(z_n)$ tinde către C'. Mulțimea d' este compactă și, fiind un domeniu închis, este și conexă, deci un continuu compact.

Dacă luăm un șir de cercuri γ, tinzînd către centrul lor P, vom avea un șir de domenii jordaniene închise

$$\overline{d}_1, \ \overline{d}_2, \ldots, \overline{d}_\nu, \ldots,$$

corespunzătoare, pe care le putem alege astfel ca $d_\nu \supset d_{\nu+1}$ și care vor avea ca intersecție punctul unic P. Domeniilor d_ν le corespund domeniile închise

$$\overline{d}'_1, \ \overline{d}'_2, \ldots, \ \overline{d}'_\nu, \ldots$$

care satisfac și ele condiții de incluziune $\overline{d}'_\nu \supset \overline{d}'_{\nu+1}$ și care, fiind continuuri compacte, au ca intersecție, după lema II, un continuu P' sau un punct unic. Trebuie demonstrat că P' este întotdeauna un punct unic.

Vom arăta mai întîi că domeniile $\overline{d}'_\nu$ sînt domenii jordaniene. Este suficient, pentru aceasta, să arătăm că unui arc jordanian Γ, interior lui D și care nu are decît o extremitate pe C, îi corespunde în D' prin $z' = \varphi(z)$ un arc Γ' de același fel.

Putem, evident, presupune că extremitatea lui Γ care se află pe C este $z = 0$. Dacă propoziția formulată nu ar fi adevărată, atunci $z' = \varphi(z)$ ar trebui să tindă pe Γ' către un arc s al lui C' cînd z tinde către 0 pe Γ. Să considerăm atunci un domeniu jordanian unghiular $T \subset D'$ asemănător celui considerat la § 13, limitat de două segmente de dreaptă ce formează un unghi cu vîrful în interiorul lui D' și de un arc σ interior lui s. Acest T este tăiat de un șir de arce Γ'_n ale lui Γ' care tind către σ și pe care $\max_{z' \in \Gamma'_n} |\varphi^{-1}(z')| = \varepsilon_n$ tinde către zero cu $\frac{1}{n}$.

Arcele Γ'_n limitează în interiorul lui T domenii unghiulare T_n.

Putem aplica lui $\varphi^{-1}(z')$ în T_n teorema lui Carleman de la § 13, cu $m = \varepsilon_n$ (deoarece $|\varphi^{-1}(z')|$ este mărginit în D', deci în T_n). Cum $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, rezultă îndată că, pe un segment al bisectoarei lui T, trebuie să avem

* Prin distanță de la un punct z la C se înțelege distanța minimă de la z la punctele C. Ea este > 0 dacă z nu este pe C.

$\varphi^{-1}(z') = 0$ și deci, cum $\varphi^{-1}(z')$ este olomorfă în D', că $\varphi^{-1}(z') \equiv 0$, ceea ce evident este imposibil. Domeniile $\bar{d}'_\nu$ sînt deci domenii jordaniene.

Dar mulțimea P' ce corespunde punctului P nu poate fi decît un arc sau un punct al frontierei lui $\bar{d}'_\nu$. Acesta din urmă fiind domeniu jordanian, teorema lui Painlevé de la § 14 arată îndată că prima ipoteză ar duce la $\varphi^{-1}(z') = \text{const.}$ * și deci trebuie exclusă.

Deci P' se reduce la un punct; acest punct corespunde lui P de pe conturul C.

Am arătat, așadar, că $z' = \varphi(z)$ se extinde la C în mod univoc.

Raționamentul identic, aplicat lui $z' = \varphi^{-1}(z)$, arată că și această funcție este univocă, astfel încît reprezentarea biunivocă între D și D' se extinde la $\bar{D}$ și $\bar{D}'$.

Cum $\bar{d}'_\nu$ se strîng tinzînd către P' cînd $\bar{d}_\nu$ tind către P, corespondența biunivocă între C și C' este continuă de la $\bar{D}$ la $\bar{D}'$.

Pentru motivul analog ea este continuă de la $\bar{D}'$ la $\bar{D}$, deci bicontinuă, adică topologică între $\bar{D}$ și $\bar{D}'$, punctele frontieră corespunzînd între ele ca și punctele interioare.

Teorema este astfel demonstrată.

20. Teorema aceasta ne va fi de mare folos într-un capitol următor, pentru prelungirea analitică a funcțiilor de reprezentare conformă a unor domenii date.

Ea ne arată că proprietățile de frontieră, stabilite în secțiunea precedentă, se pot extinde la domenii jordaniene oarecare, cu transpunerile corespunzătoare.

În general, toate proprietățile funcțiilor olomorfe în cercul $|z| < 1$ se extind astfel la funcții olomorfe în domenii jordaniene oarecare.

IV. SINGULARITĂȚI ȘI DOMENII DE EXISTENȚĂ ALE FUNCȚIILOR UNIFORME

21. Toate considerațiile de pînă aici, din capitolul acesta, privesc proprietăți ale funcțiilor uniforme în domenii simplu conexe. Însăși teorema lui Carathéodory asupra extensiunii funcției de reprezentare conformă la frontiera domeniului nu privește decît asemenea domenii. Dar, funcțiile uniforme au în general domenii de olomorfie care nu sînt simplu conexe, astfel încît pentru a le studia *global* cu toate singularitățile lor sîntem nevoiți să abordăm problema pe altă cale.

În capitolul IV, §§ 18 și 12, am definit mulțimea singulară a unei ramuri uniforme de funcție analitică și, după ce am considerat cazul cel mai simplu dar foarte important în care această mulțime este redusă la un singur punct, am dat cîteva indicații asupra unor extensiuni ale teoremei fundamentale

* Este clar că, în teorema lui Painlevé, condiția «tinde către zero» poate fi înlocuită cu «tinde către o constantă». Ajunge să scădem din $f(z)$ această constantă, pentru a fi aduși la formularea din secțiunea precedentă.

a lui Weierstrass pentru cazul cînd mulțimea singulară cuprinde o infinitate de puncte.

În general, o funcție uniformă posedă o infinitate de puncte singulare, putînd forma mulțimi foarte variate.

Deși cazul cel mai important este cel examinat în capitolele precedente al unui punct singular unic (de exemplu cazul funcțiilor întregi), în probleme ce se prezintă tot mai des în cercetările moderne intervin funcții mult mai puțin simple decît cele întregi sau meromorfe, funcții în care nu numai mulțimea punctelor singulare este de structură foarte variată, dar și comportarea lor în vecinătatea acestora diferă foarte mult, punînd în evidență posibilitatea unor singularități de natură foarte diferită.

Fără a putea intra aici în amănunte asupra claselor mai generale de funcții uniforme, al căror studiu este încă foarte departe de a fi atins dezvoltarea actuală a teoriei funcțiilor întregi și meromorfe, vom da totuși cîteva noțiuni generale, care ne vor permite apoi să trecem la funcțiile multiforme, cărora le sînt consacrate ultimele capitole ale acestui volum.

22. O funcție $f(z)$ fiind dată uniformă în tot planul, punctele ei ordinare corespunzînd tuturor elementelor tayloriene ale prelungirii sale analitice formează, evident, o mulțime deschisă conexă, deci *un domeniu* din planul (z).

Fie W acest domeniu.

Frontiera F a lui W conține toate punctele singulare ale lui $f(z)$. Acestea sînt caracterizate, printre punctele lui F, prin proprietatea *accesibilității*: mulțimea $S \subset F$ a punctelor singulare este mulțimea punctelor lui F care sînt extremități de drumuri continue așezate în întregime în W, cu excepția extremității care este pe F.

Mulțimea deschisă W este conexă, dar mulțimea ei frontieră F, care este *închisă*, nu este, în general, conexă. Componentele ei [conexe (continuuri) sau formate de puncte unice] pot fi în număr infinit și chiar o infinitate nenumărabilă. Printre componentele punctuale, unele pot fi puncte izolate. În vecinătatea lor, funcția satisface atunci teorema lui Cauchy-Riemann (cap. IV, § 19), iar dacă punctul nu este un pol, teorema lui Weierstrass (cap. IV, § 20).

Am văzut în numeroase împrejurări că în jurul unui pol (cel mai simplu tip de punct singular) funcția se comportă, din mai toate punctele de vedere, în mod cu totul analog ca în jurul unui punct ordinar în care « valoarea funcției este ∞ ».

Dacă însemnăm valorile funcției, nu pe planul (u), cum am făcut-o în general, ci pe sfera lui Riemann pe care se reprezintă planul complex (u), diferența între pol și punct ordinar dispare de fapt.

În general, ea nu apare de altfel decît în chestiunile unde intervine direct o reprezentare analitică a funcției în jurul punctului considerat, reprezentare dată cu ajutorul unei serii în care figurează, în mod esențial, variabila z ca reprezentant al punctelor din planul complex respectiv.

Este deci firesc să lărgim domeniul W al elementelor tayloriene ale funcției prin adăugirea la el a polilor ei, adică a elementelor de forma

$$\sum_{n=\mu}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

unde μ este un întreg oarecare *.

Mulțimea astfel lărgită nu va înceta de a fi un *domeniu*, în sensul adoptat de la început (cap. I, § 14) și păstrat de atunci.

Să numim R acest domeniu.

Într-un sens mai larg decît cel weierstrassian, R va fi numit *domeniul riemannian de existență* al lui $f(z)$. Domeniul R este o mulțime deschisă și conexă a planului (z) întreg.

Printr-o schimbare de variabilă $z = \frac{1}{z' - a}$, unde a este un punct ordinar oarecare fix, putem face întotdeauna ca mulțimea frontieră F a lui R să nu cuprindă punctul ∞ și deci ca, în planul (z), ea să fie o mulțime compactă **. O asemenea schimbare de variabilă nu aduce nici o modificare proprietăților esențiale ale funcției; ea este cu totul analogă celei pe care o facem în cazul punctului singular unic, cînd există avantaje de comoditate în a avea acest punct la ∞.

Vom considera deci o funcție uniformă $f(z)$ al cărei domeniu de existență R cuprinde în interior punctul ∞.

Punctele singulare ale lui $f(z)$ sînt punctele accesibile din R ale lui F, în sensul precizat mai sus; toate acestea sînt puncte singulare nepolare, polii eventuali ai lui $f(z)$ făcînd parte din R.

23. Natura mulțimii frontiere F a lui R este esențială în studiul funcției $f(z)$.

Punctele singulare ale lui $f(z)$ formează o mulțime densă pe F, adică în orice cerc cu centrul într-un punct al lui F există puncte accesibile din R, puncte singulare.

Pentru cercetarea lui $f(z)$ este adesea util să se poată descompune funcția într-o sumă de alte funcții, avînd fiecare ca mulțime F purtătoare a punctelor ei singulare o parte din mulțimea F a funcției $f(z)$.

O asemenea descompunere se face cu ajutorul următorului principiu:

Fie F frontiera domeniului de existență al funcției uniforme $f(z)$, iar F_1 și F_2 două părți ale mulțimii F, satisfăcînd condițiile

1° $F_1 + F_2 = F$;

2° $F_1 F_2 = 0$;

3° F_1 *și* F_2 *sînt mulțimi închise.*

---

* Considerarea «valorii ∞» a *funcției* este cu atît mai justificată cu cît domeniul ei de definiție poate cuprinde punctul de la ∞, adică *variabila* z poate fi susceptibilă de a lua valoarea ∞. Am văzut, pe de altă parte, cît de importantă pentru caracterizarea funcției este comportarea ei în vecinătatea punctului ∞.

** F este frontiera lui R, deci o parte din frontiera lui W, desemnată mai sus prin aceeași literă. Dar această nouă frontieră este, și ea, mulțime închisă și tot ceea ce am spus mai sus rămîne valabil pentru ea.

Există atunci două funcții uniforme $f_1(z)$ și $f_2(z)$, având ca frontiere ale domeniilor lor de existență respectiv pe F_1 și F_2, și astfel ca $f_1(z) + f_2(z) = f(z)$.

F fiind mărginit, F_1 și F_2 sînt mărginite.

Toate aceste trei mulțimi sînt deci compacte, conform condiției 3°.

Acest fapt, împreună cu condiția 2° de mai sus, permite construirea unui număr finit de domenii jordaniene (acoperind mulțimile F_1F_2 cu un număr finit de cercuri cu raze suficient de mici), domenii exterioare unul altuia, fiecare cuprinzînd, în interiorul său, fie o parte din F_1 fără a cuprinde nici un punct din F_2, fie o parte din F_2 fără nici un punct din F_1, orice punct din F fiind însă cuprins într-unul din domenii.

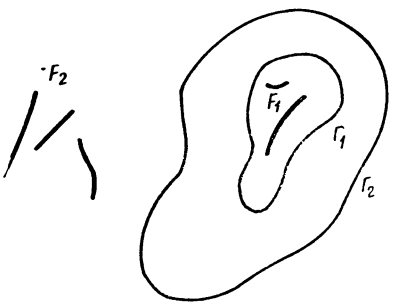


Fig. 27

Este, așadar, posibil să construim curbe simple închise rectificabile Γ (de exemplu linii poligonale închise), astfel ca F_1 să fie interior iar F_2 exterior lui Γ, pe Γ neaflîndu-se nici un punct al lui F.

Fie Γ_1 și Γ_2 (fig. 27) două astfel de curbe, Γ_1 fiind cuprins în interiorul lui Γ_2.

Între Γ_1 și Γ_2, ca și pe aceste două curbe, $f(z)$ este olomorfă.

Integrala lui Cauchy dă, așadar, pentru un punct oarecare z exterior lui Γ_1 și interior lui Γ_2

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

integralele fiind luate în sens direct. Să punem

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},\quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Avem deci, în domeniul $(\Gamma_1\Gamma_2)$ limitat de cele două curbe,

$$f_1(z) + f_2(z) = f(z). \tag{23}$$

Dar $f_2(z)$ este funcție uniformă și olomorfă în interiorul lui Γ_2 *. Relația (23) prelungită analitic în interiorul lui Γ_2 arată deci că $f_1(z)$ trebuie să fie, în interiorul lui Γ_2, uniformă și olomorfă în domeniul complementar lui F_1. Pe de altă parte, $f_1(z)$ este uniformă și olomorfă în exteriorul lui Γ_1. Relația (23) prelungită în exteriorul lui Γ_2 arată atunci că $f_2(z)$ este, în acest domeniu, uniformă și olomorfă în domeniul complementar lui F_2.

Deci $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sînt uniforme în tot (z) și au ca frontieră a domeniului lor de existență pe F_1 și F_2 respectiv.

24. Descompunerea lui $f(z)$ se poate continua astfel reducîndu-l treptat la o sumă de funcții avînd fiecare ca mulțime frontieră a domeniului ei de existență părți din ce în ce mai reduse din F. Dar asemenea reducere a

* Aceasta rezultă din faptul că $f(\zeta)$ este continuă pe Γ_2. A se vedea capitolul III, § 40

singularităților lui $f(z)$ nu se poate face, în general, pînă la singularități izolate. În particular, nici o componentă continuă din F (deci din mulțimea singulară S) nu se poate reduce în acest mod.

Totuși, reducerea indicată în paragraful precedent poate fi utilă în unele cazuri.

25. O problemă importantă se pune în mod firesc : care este generalitatea domeniilor R pentru funcțiile uniforme în general, adică ce fel de domenii ale planului (z) sînt domeniile maxime de meromorfie ale funcțiilor uniforme?

Vom arăta că *orice domeniu din planul (z) este un domeniu de existență al unei funcții uniforme.*

Adăugînd acestei funcții o altă funcție, al cărei domeniu de existență cuprinde pe cel dintîi, putem obține atunci o infinitate de funcții corespunzînd domeniului de existență dat.

Fie R un domeniu oarecare din (z), a cărui frontieră F este presupusă compactă.

Trebuie construită o funcție meromorfă în R care să nu fie meromorfă în nici un alt domeniu $R' \supset R$.

Pentru acest scop vom generaliza procedeul lui Mittag-Leffler dat în capitolul VI, § 10 numai pentru cazul particular cînd F se reduce la punctul ∞.

26. Mulțimea F avînd să joace aici rolul punctului ∞, să construim în R o mulțime numărabilă de puncte $\{b_n\}$, pe care le vom lua ca poli, și care mulțime să îndeplinească condiția ca să nu aibă nici un punct de acumulare în R și ca orice punct al lui F să fie punct de acumulare al ei.

Pentru aceasta, vom putea proceda astfel : vom duce în planul (z) paralelele la axa imaginară prin punctele $z = m$ (m parcurge mulțimea tuturor întregilor) și paralelele la axa reală prin $z = im$. Din pătratele astfel formate, care «pavează» planul întreg, vom reține numai pe acelea care conțin, fie în interior fie pe contur, cel puțin un punct al lui F.

Să alegem, în fiecare pătrat de acest fel, cîte un punct $b_1, b_2, \cdots, b_h$, care aparține lui R *. Ele vor fi, ca și pătratele reținute, în număr finit, deoarece F este mărginit.

Să împărțim acum pe fiecare din pătratele acestea în alte patru pătrate egale, de latură $1/2$, și să reținem iarăși numai pe acelea care conțin cel puțin un punct al lui F, alegînd, în fiecare din ele, cîte un punct b_{h+1}, $b_{h+2}, \ldots, b_{h+k}$, din R, întocmai ca mai sus.

Continuînd astfel indefinit, vom forma o mulțime numărabilă b_n ($n = 1,2,\ldots$), așezată în întregime în R, fără puncte de acumulare în R, dar pentru care orice punct al lui F este punct de acumulare.

Să atașăm acum fiecărui b_n cîte un polinom în $\frac{1}{z - b_n}$, fie $\pi_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right)$ și să ne propunem să construim o funcție meromorfă în R avînd polii b_n cu $\pi_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right)$ ca părți principale în dezvoltarea Laurent respectivă. Funcția

* Este clar că în orice pătrat există puncte din R, deoarece F este frontiera lui R.

va avea, evident, orice punct al lui F ca punct singular esențial și domeniul ei de existență se va confunda cu R.

27. Pentru orice b_n, există un punct $\beta_n \in F$ astfel că orice alt punct din F este la o distanță $\geqslant |\beta_n - b_n|$ de punctul b_n. Cantitatea $|\beta_n - b_n|$ este evident pozitivă, pentru că $b_n \in R$.

O schimbare de variabilă

$$z = \beta_n + \frac{1}{z'}$$

arată îndată că, în domeniul închis $|z - \beta_n| \geqslant 2|\beta_n - b_n|$, $\varepsilon > 0$ fiind dat arbitrar, avem

$$\left|\pi_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) + P_n\left(\frac{1}{z - \beta_n}\right)\right| < \varepsilon,$$

cu un P_n polinom în $\frac{1}{z - \beta_n}$, convenabil ales.

Într-adevăr, schimbarea de variabilă în chestiune reduce totul la cazul analog tratat în capitolul VI (loc. cit.), aruncînd pe β_n la infinit.

Ca și în cazul amintit, să luăm un șir de numere pozitive ε_n astfel ca $\sum_n \varepsilon_n$ să fie convergentă.

Funcția

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\pi_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) + P_n\left(\frac{1}{z - \beta_n}\right)\right], \tag{24}$$

unde am ales P_n astfel ca în $|z - \beta_n| \geqslant 2|\beta_n - b_n|$ să avem

$$\left|\pi_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) + P_n\left(\frac{1}{z - \beta_n}\right)\right| < \varepsilon_n, \tag{25}$$

îndeplinește atunci toate condițiile cerute.

Într-adevăr, fie $\overline{\Delta}$ un domeniu închis oarecare, așezat în întregime în R. Cum nu există decît un număr finit de b_n a căror distanță de F este $> \rho$, numărul $\rho > 0$ fiind dat oarecare, este clar că de la un n destul de mare înainte inegalitatea (25) va fi valabilă în tot $\overline{\Delta}$. Va ajunge pentru aceasta să luăm n destul de mare, pentru ca să avem

$$2|\beta_n - b_n| \leqslant \text{dist. min. } (\overline{\Delta}, F).$$

Făcînd abstracție de un număr finit de termeni, seria (24) este deci uniform convergentă în $\overline{\Delta}$.

28. Funcția (24) arată că orice domeniu R poate fi domeniu de existență riemannian al unei funcții, adică există o funcție uniformă meromorfă în R și care nu poate fi prelungită dincolo de R.

Dar procedeul de mai sus, apropiat de cele amintite din capitolul VI, ne permite să construim și o funcție olomorfă în R care nu poate fi prelungită dincolo de R, adică o funcție uniformă fără poli pentru care R este domeniul de existență weierstrassian.

Să luăm pentru aceasta o mulțime numărabilă $\{b_n\}$, îndeplinind aceleași condiții ca cele de la paragraful precedent, și să ne propunem să formăm acum o funcție uniformă și olomorfă în R, avînd zerourile în punctele b_n. O asemenea funcție va avea, evident, ca puncte singulare esențiale orice punct al lui S * și deci nu va putea fi prelungită dincolo de R.

Luînd în construcția de mai sus $\pi_n = \frac{1}{z - b_n}$, vom obține o funcție $\varphi(z)$ meromorfă în R avînd în b_n poli simpli cu reziduul 1. Schimbarea de variabilă indicată mai sus arată îndată că dacă procedăm ca în cazul analog de la capitolul VI obținem în (25) un polinom $P_n\left(\frac{1}{z - \beta_n}\right)$, în care coeficientul lui $\frac{1}{z - \beta_n}$ este 1.

Să scriem deci

$$P_n\left(\frac{1}{z - \beta_n}\right) = \frac{1}{z - \beta_n} + P_n^1\left(\frac{1}{z - \beta_n}\right),$$

unde P_n^1 nu mai conține termen de gradul întîi în $\frac{1}{z - \beta_n}$.

Putem presupune originea lui (z) în R.

Să considerăm funcția

$$g(z) = e^{\int_0^z \varphi(u)\,du} = e^{\int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{u - b_n} + \frac{1}{u - \beta_n} + P_n^1\left(\frac{1}{u - \beta_n}\right)\right] du}.$$

Seria de la exponent este uniform convergentă în $\overline{\Delta} \subset R$, dacă lăsăm la o parte un număr finit de termeni. Avem deci

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{b_n}\right)\left(1 - \frac{z}{\beta_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{1}{z - \beta_n}\right)}, \tag{26}$$

unde $Q_n\left(\frac{1}{z - \beta_n}\right) = \int_0^z P_n^1\left(\frac{1}{u - \beta_n}\right) du$. Cum $P_n^1\left(\frac{1}{u - \beta_n}\right)$ nu cuprinde termeni de gradul întîi în $\frac{1}{u - \beta_n}$, această integrală este un polinom în $\frac{1}{z - \beta_n}$.

O b s e r v a ț i e. Expresia lui $g(z)$ din (26) este cu totul analogă funcțiilor întregi produse canonice de la capitolul VI. Se poate observa că, întocmai ca și aici, formarea produsului canonic se putea deduce și acolo din procedeul lui Mittag-Leffler.

29. Exemple se pot forma din cele mai variate. Ne vom mulțumi să dăm aici două foarte simple.

Să luăm, drept mulțime F, mulțimea punctelor $z = x + iy$ satisfăcînd condițiile:

$$y = \sin\frac{1}{x} \text{ pentru } 0 < |x| \leqslant \frac{1}{\pi}$$

și

$$|y| \leqslant 1 \text{ pentru } x = 0.$$

* Orice punct al lui F și deci al lui S fiind punct de acumulare de zerouri ale funcției.

Această mulțime F formează un continuu compact și mulțimea complementară R este un domeniu. Atît funcția $f(z)$ cît și $g(z)$, formate ca mai sus cu această mulțime F, au ca puncte singulare punctele lui F, pentru care $x \neq 0$, sau $x = 0$ și $|y| = 1$. Punctele segmentului $(x = 0, |y| < 1)$ nefiind accesibile din R, sînt puncte ale lui F, fără a face parte din S.

Conform teoremei lui Painlevé, demonstrată mai sus, funcția $g(z)$, deși are o infinitate de zerouri în vecinătatea oricărui punct al lui F, nu poate tinde către zero pe toate șirurile care tind către punctele unui arc din F.

30. Să luăm acum drept F mulțimea perfectă a lui Cantor*, așezată pe segmentul $[0, 1]$ al axei reale. Să formăm și aici funcția $g(z)$ ca mai sus. Teorema lui Painlevé, reamintită în exemplul precedent, nu ne mai spune aici nimic asupra limitelor lui $g(z)$ cînd tindem către punctele lui P, căci P nu conține nici un arc jordanian. Nici teorema lui Weierstrass asupra comportării funcțiilor uniforme în jurul unui punct izolat nu ne poate informa, căci P nu conține puncte izolate. Teorema Painlevé-Pompeiu-Bezicovici, menționată în capitolul IV (§ 21), ne asigură însă că $g(z)$ tinde către orice valoare dată *a priori*, cînd z tinde către un punct al lui P. Într-adevăr, lungimea lui P este nulă.

31. În concluzie, putem afirma că: orice domeniu R din planul (z) este domeniu de existență riemannian al unei funcții uniforme, și chiar domeniu de existență weierstrassian al unei astfel de funcții. Punctele ei singulare sînt punctele accesibile ale frontierei lui R.

În capitolul următor vom pune problema analogă relativă la domeniul de existență pentru cazul general al funcțiilor analitice multiforme.

---

* O mulțime *perfectă* este o mulțime închisă fără puncte izolate. Se obține mulțimea P a lui Cantor scăzînd din $[0, 1]$ intervalul deschis cu centrul în $(1/2)$ de lungime egală cu o treime din lungimea sa și procedînd apoi la fel, indefinit, cu intervalele închise rămase pe $[0, 1]$. Se constată ușor că suma lungimilor tuturor intervalelor scăzute este 1 și deci că *lungimea lui* P este nulă.

CAPITOLUL X

FUNCŢII ANALITICE MULTIFORME

Am presupus, în general pînă aici, că funcţia analitică considerată, provenită din prelungirea unui element dat al ei, este uniformă, adică fiecărui punct din domeniul de existenţă al funcţiei îi corespunde un singur element al ei. În unele cazuri, fără a presupune nimic asupra comportării funcţiei în afara unui domeniu dat, ne-am mărginit totuşi la o ramură uniformă a ei, corespunzătoare acelui domeniu.

Pentru a aborda studiul global al funcţiilor analitice în toată generalitatea sa şi a putea face să apară astfel în mod natural diversele clase de funcţii, este însă indispensabil să ţinem seama de faptul că, în general, un element weierstrassian dat generează o funcţie analitică multiformă.

Teoria diferitelor clase de funcţii multiforme este azi încă mult mai puţin avansată decît cea a funcţiilor uniforme. În aceste ultime două capitole ale primului nostru volum de teoria funcţiilor complexe, vom da din teoria funcţiilor multiforme numai cîteva elemente şi noţiuni fundamentale, urmate de cîteva din cele mai importante aplicaţii la studiul funcţiilor uniforme.

I. DOMENIU DE EXISTENŢĂ ŞI INVERSA UNEI FUNCŢII ANALITICE DATE

1. Să considerăm un element ordinar (weierstrassian) dat prin seria

$$u - u_0 = c_1(z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots, \tag{1}$$

unde am pus $c_0 = u_0$, pentru a sublinia că această cantitate reprezintă valoarea seriei în $z = z_0$, centrul cercului ei de convergenţă. Seria (1) transformă cercul de convergenţă (mai precis interiorul său D) într-un domeniu din (u) care conţine pe u_0.

Să presupunem mai întîi că avem $c_1 \neq 0$.

Cum atunci în (1), care se mai scrie

$$u - u_0 = (z - z_0)\ [c_1 + c_2 (z - z_0) + \ldots],$$

funcția din paranteza ultimă nu se anulează în vecinătatea lui z_0, există un domeniu $d \subset D$, cuprinzînd pe z_0, în care (1) este *univalentă*.

Într-adevăr, variația argumentului membrului al doilea din (1), cînd z descrie, în sens direct, o curbă jordaniană în jurul lui z_0 care limitează un domeniu d din vecinătatea lui z_0, este atunci aceea a primului său factor, adică 2π; ceea ce arată că, dacă d este așezat într-un cerc destul de mic cu centrul în z_0, nu numai u_0 dar și oricare altă valoare luată în acest d nu este luată în d decît o singură dată (cap. II § 21 și 24).

Pe de altă parte (cap. III, §44), univalența în d duce la olomorfia în domeniul imagine al lui d prin (1) (cap. III, § 45). Deci, într-un cerc destul de mic în jurul lui u_0, inversa transformării (1) se poate scrie și ea sub forma

$$z - z_0 = c_1' \ (u - u_0) + c_2' \ (u - u_0)^2 + \ldots, \tag{1'}$$

cu $c_1' = \frac{1}{c_1}$.

Prin urmare, elementul (1), în cazul $c_1 \neq 0$, posedă un element invers (1') de aceeași formă.

2. Să examinăm acum cazul cînd $c_1 = 0$ și fie c_p coeficientul $\neq 0$ din (1) cu indicele cel mai mic. Putem deci scrie (1)

$$u - u_0 = (z - z_0)^p \ [c_p + c_{p+1} (z - z_0) + \ldots], \tag{2}$$

cu $c_p \neq 0$ și $p \geqslant 2$.

Din (2) se deduce îndată, punînd

$$u - u_0 = v^p, \tag{3}$$

relația

$$v = (z - z_0) \ \sqrt[p]{c_p + c_{p+1} (z - z_0) + \ldots}$$

Cum funcția de sub radical este $\neq 0$ în vecinătatea lui z_0, radicalul este funcție olomorfă în această vecinătate. Avem deci

$$v = (z - z_0) \ \ [\alpha_1 + \alpha_2 \ (z - z_0) + \ldots],$$

cu $\alpha_1 = \sqrt[p]{c_p} \neq 0$ și ne găsim, prin urmare, în cazul din paragraful precedent. Avem, așadar, ca și mai sus,

$$z - z_0 = \alpha_1' \, v + \alpha_2' \, v^2 + \ldots,$$

care, împreună cu (3), va da dezvoltarea inversei elementului (2) în jurul lui u_0 într-un cerc destul de mic. Această dezvoltare se poate scrie, ținînd seamă de (3),

$$z - z_0 = \alpha_1' (u - u_0)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2' (u - u_0)^{\frac{2}{p}} + \ldots, \tag{2'}$$

seria din membrul al doilea fiind convergentă într-un cerc cu centrul în u_0 și avînd, în fiecare punct al acestui cerc, p valori corespunzînd celor p valori ale lui $(u - u_0)^{\frac{1}{p}}$.

3. În general, să considerăm seriile de tipul

$$c_0 + c_1 (z - z_0)^{\frac{1}{p}} + c_2 (z - z_0)^{\frac{2}{p}} + \ldots + c_n (z - z_0)^{\frac{n}{p}} + \ldots, \tag{4}$$

unde p este un număr întreg pozitiv.

Seriile (4) se reduc la serii tayloriene pentru $p = 1$. În cazul general, să facem schimbarea de variabilă

$$z - z_0 = t^p. \tag{5}$$

Ea transformă cercul $|t| < R$ din planul (t) în cercul $|z - z_0| < R^p$ din (z), *aplicînd primul cerc de p ori pe cel din urmă*. Se înțelege prin aceasta că (5) face să corespundă punctelor așezate la aceeași distanță de centrul $t = 0$, și ale căror vectori fac unghiuri consecutive egale cu $\frac{2\pi}{p}$, unul și același punct din cercul cu centrul în $z = z_0$, iar centrului $t = 0$, centrul $z = z_0$.

Transformarea (5) mai arată că atunci cînd t descrie o dată o circumferință în jurul lui $t = 0$, imaginea sa z descrie de p ori, în același sens, circumferința corespunzătoare în jurul lui $z = z_0$.

Se vede de aici că seriile de tipul (4), care prin (5) devin serii tayloriene în t, se bucură exact de aceleași proprietăți ca și acestea din urmă în ceea ce privește domeniul de convergență, cu deosebirea însă că aici, în fiecare punct diferit de centru, seria (4) are p valori distincte. Cînd z descrie o circumferință cu centrul în z_0, interioară cercului său de convergență, cele p valori ale sumei seriei (4) se permută circular, întocmai ca t din (5), în afară de valoarea în $z = z_0$ care rămîne fixă.

Pentru funcția reprezentată prin (4), punctul z_0 este, prin definiție, un *punct critic algebric*. Oricare alt punct din cercul de convergență a lui (4) este, pentru fiecare determinare a sumei seriei, un punct ordinar; adică această determinare se poate dezvolta în serie tayloriană obișnuită în jurul unui asemenea punct, cum se constată îndată ținînd seama de proprietatea analogă a lui (5).

Inversiunea elementelor ordinare introduce, așadar, în cazul cînd în (1) avem $c_1 = 0$, elemente care se caracterizează prin dezvoltări de tipul (4) și pe care le vom numi *elemente critice algebrice* sau, cînd nu poate exista ambiguitate, elemente *critice*.

4. Lărgirea mulțimii elementelor ordinare (weierstrassiene) prin adăugirea elementelor critice se impune, așadar, dacă vrem să definim funcția inversă a unei funcții analitice oarecare.

În prelungirea analitică a unui element ordinar dat (cap. IV) se pot întîlni unele puncte singulare în jurul cărora funcția să admită o reprezentare de tipul (4). Deși prelungirea analitică în sensul definit în capitolul IV nu se mai poate efectua dincolo de un asemenea punct, folosirea elementelor critice algebrice ne dă totuși posibilitatea de a continua atunci prelungirea într-un sens mai lărgit, primind printre elementele funcției și aceste elemente critice.

Să observăm că seriile de tipul (4) nu mai necesită, pentru inversiunea lor, introducerea nici unui alt tip nou de serii.

Fie într-adevăr seria analogă cu (1)

$$u - u_0 = c_1 (z - z_0)^{\frac{1}{p}} + c_2 (z - z_0)^{\frac{2}{p}} + \ldots,$$

unde însă $p \geqslant 2$.

Schimbarea de variabilă

$$z - z_0 = t^p \tag{5}$$

stabilește o relație între t și u, în vecinătatea lui $t = 0$, $u = u_0$, relație identică celei pe care (1) o exprimă între z și u, în vecinătatea lui $z = z_0$, $u = u_0$.

Vom avea deci, în cazul $c_1 \neq 0$,

$$t = c_1' (u - u_0) + c_2' (u - u_0)^2 + \ldots,$$

iar în cazul $c_1 = 0$ (cu c_q coeficientul $\neq 0$ de indice cel mai mic),

$$t = \alpha_1' (u - u_0)^{\frac{1}{q}} + \alpha_2' (u - u_0)^{\frac{2}{q}} + \ldots$$

Ținînd seama de (5) se vede că, și într-un caz și altul, expresia lui $z - z_0$ în funcție de $u - u_0$ se obține prin ridicarea la puterea p a seriilor de mai sus, ceea ce, după cum se știe, dă serii de același fel. Seriile care vor exprima pe $z - z_0$ în funcție de $u - u_0$ intră deci și ele în tipul (4).

5. Toate elementele considerate mai sus se extind, fără nici o dificultate, la cazul cînd z_0 este punctul ∞. Prelungirea analitică lărgită, întocmai ca și prelungirea analitică weiertrassiană definită în capitolul IV, se extinde la punctul de la infinit al lui (z), înlocuind într-un element oarecare, ce nu cuprinde pe $z = 0$, variabila z prin $\frac{1}{z'}$ și efectuînd apoi prelungirea elementului transformat pe drumul L', transformat al drumului L care tinde către ∞. Pe L' punctul $z' = 0$ poate da atunci un element ordinar sau critic algebric de felul celor introduse mai sus. Vom considera asemenea elemente ca elemente relative la $z_0 = \infty$.

6. În capitolul precedent, unde ne-am ocupat numai de funcțiile uniforme, elementele critice nu puteau interveni. Pentru motivele arătate, am lărgit însă și acolo domeniul de existență al funcției prin introducerea elementelor polare (cap. IX, § 22).

Pentru aceleași motive vom mai introduce și aici elementele analoge. Pentru asemenea elemente, suma seriei va fi considerată ∞ în centrul cercului de convergență*. Dar aici va trebui să considerăm și elemente care sînt simultan polare și critice algebrice. Vom considera deci, *în total*, elemente de forma

$$\sum_{n=\mu}^{\infty} c_n (z - z_0)^{\frac{n}{p}}, \tag{6}$$

* Vom continua să-l numim *cerc de convergență*, chiar în cazul unui element polar,

unde p este un întreg pozitiv, iar μ un întreg oarecare, formă care cuprinde toate tipurile introduse mai sus.

Cazul $\mu \geqslant 0$ corespunde elementelor ordinare dacă $p = 1$, elementelor critice algebrice dacă $p \geqslant 2$.

Cazul $\mu < 0$ dă elemente polare. Ele corespund polilor ordinari dacă $p = 1$, polilor critici dacă $p \geqslant 2$.

În cazul cînd z_0 este ∞, conform celor spuse în § 5, expresia (6) ia formele corespunzătoare $\left(\text{în care } z - z_0 \text{ este înlocuit cu } \frac{1}{z}\right)$. Cercul de convergență devine, în acest caz, exteriorul unui cerc destul de mare, cu centrul în origine.

Considerînd seria

$$\frac{1}{\sum_{n=\mu}^{\infty} c_n (z - z_0)^{\frac{n}{p}}},$$

se arată, ca mai sus, că elementele (6) polare (ordinare sau critice) au și ele ca inverse tot elemente de tipul (6).

Prin introducerea elementelor (6) am lărgit astfel și mai mult procesul de prelungire analitică.

Totalitatea elementelor (6) care se obțin din prelungirea astfel *lărgită* plecînd de la un element dat — inclusiv elementele relative la punctul de la infinit — formează *domeniul de existență riemannian* al funcției analitice*. Pentru fiecare element al acestui domeniu funcția are o valoare determinată finită sau infinită : valoarea sumei seriei corespunzătoare în centrul elementului.

Considerarea funcției în domeniul ei de existență *riemannian* prezintă, după cum se vede, avantajul că putem vorbi acum de *funcția analitică inversă* a unei funcții analitice date. Domeniul acestei funcții inverse este format de totalitatea elementelor inverse ale elementelor date.

Elementele inverse formează într-adevăr și ele un domeniu de existență riemannian, în sensul că sînt legate între ele prin prelungirea lărgită definită mai sus. Oricărui drum de prelungire a elementelor domeniului funcției date îi corespunde un asemenea drum pentru elementele lor inverse, și reciproc.

Pentru prescurtare, se vorbește adesea de «elementele funcției» în loc de elementele domeniului ei de existență.

7. Inversele funcțiilor uniforme cele mai simple ne oferă exemple de structură a domeniilor de existență riemanniene ale funcțiilor analitice multiforme.

Astfel, funcția $\arcsin z = \frac{1}{i} \log \left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right)$ are o infinitate de elemente critice algebrice, cu centrele cercurilor lor de convergență în $z = \pm 1$. Prezența unor asemenea elemente nu este însă necesară în domeniul de existență riemannian al oricărei funcții multiforme.

* Totalitatea elementelor ordinare (weierstrassiene) ar corespunde numai acelora pentru care avem $\mu \geqslant 0$ și $p = 1$. Numai aceste elemente au intervenit în definiția prelungirii analitice mai restrînse, dată în capitolul IV.

Astfel, funcția $\log z$ are o infinitate de determinări pentru orice z finit $\neq 0$, dar ea nu posedă nici un element critic algebric. Ea are două puncte *singulare* critice în 0 și ∞, în jurul cărora prelungirea duce de la o determinare la alta, dar acestor puncte nu le corespund elemente critice algebrice *în domeniul de existență* al funcției. Punctele critice 0 și ∞ sînt singularități transcendente*, și, ca atare, nu fac parte din domeniul de existență riemannian al funcției.

În mod general, singularităților care nu sînt poli sau puncte critice algebrice (ordinare sau polare) nu le corespund elemente în domeniul de existență al funcției. Asemenea singularități transcendente (numite și *esențiale*) vor trebui considerate ca fiind pe «frontiera» domeniului de existență al funcției**, analog cu cazul funcțiilor uniforme (cap. IX, § 22).

8. Sîntem deci astfel conduși să căutăm pentru domeniul de existență riemannian al unei funcții multiforme o interpretare geometrică riguroasă, analogă cu aceea pe care, în cazul funcțiilor uniforme, am găsit-o în noțiunea topologică de domeniu al sferei lui Riemann, așa cum această noțiune a fost definită în capitolul I.

Fiind vorba aici de funcții care, în general, într-un punct al planului (z) au mai multe și chiar o infinitate de valori, planul (z) (sau sfera lui Riemann pe care îl reprezentăm) trebuie înlocuit printr-o suprafață formată, într-un sens pe care-l vom preciza, din foi suprapuse, astfel ca pe o asemenea suprafață funcția să poată fi considerată uniformă. Ideea aceasta aparține lui B. Riemann, care a introdus-o și folosit-o în mod magistral pentru prima dată în celebrul său memoriu *Theorie der abelschen Integrale*, publicat în 1857.

Vom trece acum la definiția generală a suprafeței lui Riemann a unei funcții analitice date.

II. SUPRAFAȚA RIEMANNIANĂ A UNEI FUNCȚII ANALITICE

9. În expunerea elementelor de topologie a planului pe care am făcut-o în capitolul I, noțiunea fundamentală cu ajutorul căreia am definit toate celelalte noțiuni este noțiunea de vecinătate.

Planul fiind privit de noi ca mulțime a numerelor complexe, inegalitatea numerică $|z - a| < r$, care pune în evidență anumite submulțimi ale acestui plan (submulțimi posedînd anumite proprietăți și anumite *vecinătăți*), a constituit de fapt pentru noi baza tuturor dezvoltărilor ulterioare. Astfel, se poate constata cu ușurință că toate noțiunile topologice introduse pentru plan se pot transporta imediat la spațiul euclidian cu un număr n de dimensiuni***, înlocuind vecinătatea circulară din plan prin vecinătatea sferică (sau hipersferică) respectivă, pentru că asemenea vecinătăți păstrează pe acelea din proprietățile vecinătății circulare care au fost pentru noi esențiale.

---

* Polii și punctele critice algebrice se numesc *singularități algebrice*. Vom vedea mai departe motivul acestei denumiri.

** Noțiunea de *frontieră* necesită aici o definiție adecvată, pe care o vom considera în acest volum.

*** A se vedea definiția în § 13 următor.

Pentru a extinde la suprafețe și la spații mai generale noțiunile topologice definite pentru plan în capitolul I, este deci mai întîi necesar să punem bine în evidență proprietățile esențiale ale vecinătății care ne-au servit în cazul planului, adică să definim vecinătatea *axiomatic*.

Există mai multe moduri de a defini astfel un spațiu topologic. Vom alege pe unul din cele mai uzuale, care ne va permite să mergem direct la scopul urmărit aici și anume la definiția suprafeței riemanniene a unei funcții analitice date.

10. Spațiu topologic. Să considerăm o mulțime oarecare S de elemente e (numite și puncte) și să distingem în S o clasă de submulțimi (v) pe care le vom numi *vecinătăți ale elementelor* e și care să satisfacă următoarele condiții:

A. Pentru fiecare e există cel puțin o vecinătate v_e a lui e.

Orice vecinătate a lui e cuprinde pe e.

B. Dacă v_e este o vecinătate a lui e și dacă $e' \in v_e$, atunci există o vecinătate $v_{e'}$ a lui e' astfel ca $v_{e'} \subset v_e$.

C. Dacă v_e^1 și v_e^2 sînt două vecinătăți ale aceluiași element e, există atunci o vecinătate v_e^3 a lui e astfel ca $v_e^3 \subset v_e^1$ și $v_e^3 \subset v_e^2$.

D. Dacă $e \neq e'$ sînt două elemente oarecare din S, există atunci o vecinătate v_e a lui e și o vecinătate $v_{e'}$ a lui e' astfel ca $v_e \cap v_{e'} = 0$.

Mulțimea S în care am definit submulțimi (v) satisfăcînd aceste patru axiome se numește un *spațiu topologic**.

Este clar că vecinătățile circulare, definite în planul variabilei complexe z prin $|z-a| < r$, sînt *vecinătăți ale lui* a, adică satisfac cele patru axiome de mai sus.

Observație. Toate noțiunile definite în capitolul I pentru plan cu ajutorul noțiunii de vecinătate adoptată acolo se extind la spațiul S fără nici o altă modificare decît înlocuirea vecinătăților $|z-a| < r$ ale numărului complex a prin vecinătățile v ale elementului e.

11. Omeomorfie. Fie S și $\overline{S}$ două spații topologice. Să presupunem că există o corespondență biunivocă între elementele $\{e\}$ și $\{\bar{e}\}$ ale spațiilor respective, în sensul din capitolul I, § 2, adică mulțimile S și $\overline{S}$ au aceeași putere. Să presupunem, în plus, că această corespondență biunivocă poate fi aleasă astfel încît ea să fie *continuă în ambele sensuri*. Vom spune atunci că spațiile S și $\overline{S}$ sînt *omeomorfe între ele*.

Conform observației de la sfîrșitul paragrafului precedent, o corespondență (transformare) $\bar{e} = T(e)$ între elementele $e \in S$ și elementele $\bar{e} \in \overline{S}$ este *continuă* în e_0 dacă, oricare ar fi vecinătatea $\bar{v}_0$ a lui $\bar{e}_0 = T(e_0)$ în $\overline{S}$, există o vecinătate v_0 a lui e_0 în S astfel încît dacă $e \in v_0$ avem $T(e) = \bar{e} \in \bar{v}_0$. Corespondența $\bar{e} = T(e)$ este *continuă* dacă ea este continuă în *orice* $e \in S$; ea este continuă în ambele sensuri (bicontinuă) dacă și transformarea inversă a ei $e = T^{-1}(\bar{e})$ este și ea continuă.

---

* Spațiul topologic definit aici este unul din cele mai importante și mai uzuale. El se mai numește *spațiu al lui Hausdorff* (sau spațiu *separat*, din cauza axiomei *D*).

Între două spații omeomorfe S și $\bar{S}$ nu există nici o deosebire topologică. Ele trebuie considerate, din punct de vedere topologic, ca identice. Într-adevăr, oricărei noțiuni topologice din S îi corespunde aceeași noțiune în $\bar{S}$ cu aceleași proprietăți, și reciproc. Este clar că două spații omeomorfe cu un al treilea sînt omeomorfe între ele.

12. Un spațiu topologic S se numește *conex* dacă nu există în el două mulțimi A și B, astfel ca $A + B = S$, $A \cdot B = 0$, cu $A \neq 0$, $B \neq 0$, ambele mulțimi A și B fiind *deschise** în S.

13. Varietate topologică. Un spațiu topologic S conex se numește *varietate topologică de dimensiune n*, dacă orice element e al lui S posedă o vecinătate v omeomorfă cu spațiul euclidian cu n dimensiuni**.

Precizăm aici că prin spațiu euclidian cu n dimensiuni înțelegem spațiul elementelor definite prin n numere reale oarecare așezate într-o anumită ordine (coordonate carteziene) și în care vecinătatea este hipersfera corespunzătoare. În cazul $n = 2$ avem *planul euclidian*, care se distinge de planul complex prin aceea că el nu cuprinde punctul de la infinit.

O varietate topologică cu două dimensiuni se numește uneori și suprafață topologică, denumirea fiind evident justificată.

14. Folosind noțiunile introduse în paragrafele precedente vom defini acum ceea ce se numește suprafața lui Riemann (sau suprafața riemanniană) a unei funcții analitice.

Conform celor spuse în secțiunea precedentă, domeniul de existență riemannian al funcției analitice f este format din totalitatea elementelor sale caracterizate prin serii de tipul

$$\sum_{n=\mu}^{\infty} c_n (z - z_0)^{\frac{n}{p}} .$$

Fie e_0 un asemenea element. Elementul e_0, care este definit prin seria corespunzătoare, are o *proiecție* z_0 pe sfera lui Riemann [planul (z)] și un *cerc de convergență* C_0, cu centrul în z_0 și cu o rază R_0 depinzînd exclusiv de coeficienții c_n^0 ai seriei elementului e_0.

Fie r un număr pozitiv $< R_0$. Elementele e ale lui f care se obțin prin prelungirea lui e_0 pe drumurile care, pornind din z_0, rămîn în cercul γ_r^0 definit prin $|z - z_0| < r < R_0$ se numesc elemente obținute prin prelungirea *directă* a lui e_0 în γ_r^0.

Să considerăm acum mulțimea V a tuturor elementelor lui f. Mulțimea V devine un spațiu topologic în sensul de la § 10, prin definirea vecinătăților elementului e_0 în condițiile de la acel paragraf.

---

* În cazul cînd ar exista A și B în condițiile de mai sus, ambele fiind mulțimi deschise în S, ele ar fi totodată și închise în S (a se vedea observația din capitolul I, § 14). În definiția de mai sus a conexiunii lui S termenul: *deschis* se poate deci înlocui cu: *închis*.

** Aceasta se exprimă cîteodată spunînd că S este *local* omeomorf cu un spațiu euclidian.

Vom numi *vecinătate* v_r^0 *a lui* $e_0 \in V$ mulțimea elementelor lui f obținute prin prelungirea directă a lui e_0 în γ_r^0, plus elementul e_0 el însuși. Fiecărui $r < R_0$ îi corespunde deci o vecinătate a lui e_0.

Cum f este olomorfă în interiorul cercului de convergență a oricăruia din elementele domeniului său de existență, în afară poate de centrul acestui cerc *, este evident că proiecțiile pe (z) ale elementelor care constituie v_r^0 umplu tot cercul γ_r^0. Dacă e_0 este ordinar sau polar-ordinar, în fiecare punct al lui γ_r^0 se proiectează un singur element din v_r^0; dacă e_0 este critic algebric sau polar critic algebric, în fiecare punct al lui γ_r^0 se proiectează exact p elemente din v_r^0, în afară de centrul z_0, în care se proiectează numai elementul e_0 însuși.

15. Se constată cu ușurință că mulțimile (v_r), atașate astfel elementelor e ale lui f, satisfac axiomele A — D din § 10. Mulțimea V este astfel *un spațiu topologic.*

Pe V au deci un sens precis toate noțiunile definite în capitolul I pentru plan, cu aceleași definiții, în care vecinătățile circulare $|z - a| < r$ ale planului sînt înlocuite cu mulțimile v_r.

Toate elementele $e \in V$ provin din prelungirea analitică a unuia din ele și această prelungire se face pe drumuri continue L trase pe sfera (z) a lui Riemann. Imaginea acestor drumuri în V care s-a obținut făcînd să corespundă în V fiecărui punct al lui L elementul respectiv din prelungire este un drum continuu în V. O demonstrație cu totul analogă celei din capitolul I, § 13, arată atunci că V *este conexă.*

Raportîndu-ne la definițiile din capitolul I și la proprietățile mulțimilor v_r semnalate la sfîrșitul paragrafului precedent, se vede că elementele critice ca și cele polare sînt izolate în V. Imitînd demonstrația teoremei lui Poincaré și Volterra din capitolul IV, se poate chiar arăta că mulțimea acestor elemente este cel mult numărabilă.

16. În sfîrșit, se vede îndată că V *este o varietate cu două dimensiuni.*

Într-adevăr, pentru elementele ordinare și polare ordinare omeomorfia vecinătăților v_r cu interiorul unui cerc oarecare, și deci și cu planul euclidian, este evidentă**. În ceea ce privește elementele critice,

$$\sum_{n=\mu}^{\infty} c_n (z - z_0)^{\frac{n}{p}},$$

transformarea

$$z - z_0 = t^p$$

---

* Este vorba aici de ramura lui f obținută prin prelungirea numai în interiorul cercului de convergență al elementului (cap. IV).

** Domeniul $|z| < r$ este omeomorf cu planul euclidian.

Fie într-adevăr ρ și θ modulul și argumentul lui z în $|z| < r$ și ρ' și θ' aceleași mărimi pentru un punct din plan. Corespondența $\rho' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\rho}{2r}\right)$, $\theta' = \theta$ este o omeomorfie între $|z| < r$ și planul euclidian întreg.

folosită mai sus stabilește omeomorfia între vecinătățile v_r ale acestor elemente și cercurile corespunzătoare din (t) cu centrul în $t = 0$.

Varietatea V este ceea ce numim *tipul topologic* al domeniului de existență riemannian al funcției f.

17. Suprafața lui Riemann a funcției f. O dată obținut tipul topologic V al domeniului de existență al lui f, să considerăm corespondența *univocă* care duce de la elementele e ale lui V la proiecțiile lor respective z pe planul (z) (sfera lui Riemann). Această corespondență este definită printr-o transformare continuă $z = T(e)$ a lui V într-un domeniu W al lui (z) [care poate eventual ocupa planul (z) întreg]. Se spune că *V acoperă planul (z) după transformarea* $z = T(e)$.

Se numește *suprafață a lui Riemann* R (sau suprafață *riemanniană*) a funcției f asocierea lui V cu transformarea $z = T(e)$.

V, care este tipul topologic al domeniului de existență a lui f, este și *tipul topologic al lui* R. Toate proprietățile topologice ale lui R sînt cele ale lui V. Riemann a pus în evidență adînca însemnătate a acestor proprietăți pentru cunoașterea funcției f. Vom examina mai departe pe una din cele mai importante dintre ele.

Dar R nu este complet definit numai prin V. Transformarea $z = T(e)$ arată *modul de acoperire* a planului (z) de către R și acest mod de acoperire este și el de o mare însemnătate pentru cunoașterea lui f.

18. Suprafața riemanniană R, care constituie interpretarea geometrică, pe care o avem în vedere, a domeniului de existență riemannian al lui f, oferă, așadar, un puternic instrument pentru cercetarea funcțiilor analitice multiforme și pentru clasificarea lor după proprietățile lor cele mai profunde.

Spre deosebire de cazul funcțiilor uniforme, unde domeniile de existență își aflau interpretarea geometrică în noțiunea generală de domeniu din planul (z), suprafețele riemanniene nu pot fi scufundate într-un spațiu unic analog planului (z). Ele constituie fiecare un spațiu în sine, cu proprietăți foarte variate, mult mai complicate decît ale domeniilor plane.

Totuși, problema inversă, tratată pentru funcțiile uniforme la sfîrșitul capitolului IX, adică problema existenței unei clase de funcții analitice corespunzătoare unei suprafețe riemanniene date *a priori* este azi complet rezolvată. Dezvoltările preliminare speciale pe care le cere, ne obligă să o rezervăm însă pentru alt volum al acestui tratat. Să observăm numai că, pe cînd în cazul funcțiilor uniforme domeniile de existență confundîndu-se cu domeniile planului (z) problema definirii *a priori* a acestor domenii nu prezintă nici o dificultate, definirea noțiunii de suprafață riemanniană independent de o funcție dată constituie aici o problemă în sine, a cărei rezolvare trebuie să preceadă tratarea problemei de existență a funcțiilor corespunzătoare *.

---

* A se vedea, de exemplu, H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Berlin, 1913. De asemenea L. Ahlfors, Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo, 1936, t. I și S. Stoilow, ibidem, t. II, precum și S. Stoilow, *Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1938 sau 1956 și S. Stoilow, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, vol. II, cap. VII.

19. Foaie simplă a unei suprafețe riemanniene. Un domeniu D (în sensul definit în capitolul I) al lui V se numește *foaie simplă* a suprafeței riemanniene R dacă transformarea $z = T(e)$ este univalentă în D, adică dacă nu există două elemente distincte ale lui V în D care să aibă aceeași proiecție pe (z).

Fie Δ imaginea prin $z = T(e)$ a lui D în (z).

Se spune că foaia simplă D este așezată *peste* Δ. Lui Δ îi corespunde o ramură uniformă a lui f, în sensul arătat în capitolul IV.

În general, funcția analitică f fiind multiformă, peste unul și același domeniu Δ din (z) pot fi așezate mai multe sau chiar o infinitate de foi simple ale lui R.

Suprafețele riemanniene ale funcțiilor uniforme sînt caracterizate prin faptul că ele constituie în întregime numai o singură foaie simplă. Aceasta este așezată peste domeniul din (z) care este domeniul de existență al funcției f. Suprafața lui Riemann a funcției uniforme se confundă cu acest domeniu.

20. Pentru cercetarea unei suprafețe riemanniene se obișnuiește să se descompună această suprafață în foi simple ale ei. În această operație, teorema monodromiei, demonstrată în capitolul IV, este de un mare folos.

Este util să revenim aici cu cîteva observații în legătură cu această teoremă.

Fie Δ un domeniu oarecare dat în (z) și e_0 un element al lui f care se proiectează într-un punct $z_0 \in \Delta$. Prelungirea analitică a lui e_0 pe drumuri ce rămîn în Δ dă naștere la o ramură a lui f, formată dintr-o parte $e_0(\Delta)$ din elementele lui f. Mulțimea $e_0(\Delta)$ formează un domeniu D pe V, a cărui proiecție pe (z) nu ocupă neapărat tot Δ decît în cazul cînd prelungirea respectivă a lui e_0 nu întîlnește nici un punct singular transcendent. În acest caz, putem afirma că D acoperă Δ, dar atunci în general D nu este o foaie simplă a lui R. Teorema monodromiei exprimă că:

1° dacă prelungirea nu întîlnește niciun fel de singularități în Δ (adică se face numai prin elemente ordinare) și

2° *dacă* Δ *este cu conexiune simplă,*

atunci D este o foaie simplă peste Δ în sensul de mai sus.

Se constată cu ușurință, examinînd demonstrația teoremei monodromiei din capitolul IV, că din cele două condiții de mai sus, numai a doua este esențială, prima putînd fi slăbită în mod considerabil.

Să presupunem într-adevăr că prelungirea lui e_0 în Δ întîlnește poli ordinari (dar nu puncte critice), că ea se face adică prin elemente ordinare și polare ordinare, neîntîlnind altfel de singularități. Este clar că demonstrația dată în capitolul IV se poate adapta cu ușurință acestui caz, pentru că în jurul elementelor polare ordinare funcția rămîne uniformă. Concluzia subzistă: funcția este uniformă în Δ, ceea ce se traduce, în terminologia noastră actuală, prin: D este o foaie simplă așezată peste Δ.

Dar condiția 1° de mai sus se poate lărgi și mai mult.

Să presupunem că prelungirea lui e_0 în Δ întîlnește nu numai poli, dar și un număr finit oarecare de puncte singulare esențiale, în vecinătatea cărora însă funcția *rămîne uniformă.*

Evident, concluzia subzistă și aici pentru domeniul Δ' format de punctele lui Δ din care am scos aceste puncte singulare esențiale.

Observațiile acestea sînt utile pentru descompunerea suprafețelor riemanniene în foi simple. Vom da acum cîteva exemple.

21. Fie funcția

$$u = \frac{\sqrt{1+z}}{1-z}.$$

Ea are două elemente critice algebrice cu proiecțiile respectiv în $z = -1$ și $z = \infty$* și două elemente polare ordinare cu proiecția în $z = 1$.

Pentru a descompune suprafața ei riemanniană în foi simple, vom face deci în planul (z) o tăietură K, care unește punctele -1 și ∞ în lungul axei reale negative. Domeniul Δ rămas din (z) este simplu conex. Suprafața R este formată din două foi simple acoperind acest Δ, fiecare din ele cuprinzînd cîte un element polar cu proiecția în $z = 1$. Trecerea de pe o foaie pe alta se face străbătînd tăietura K.

Să observăm că prelungirea lărgită, astfel cum a fost definită mai sus, se face pe orice drum din (z) fără a se întîlni niciodată puncte singulare transcendente. Dacă ne amintim ceea ce am spus relativ la aceste puncte în secțiunea precedentă, § 7, această împrejurare ne-ar determina să considerăm suprafața riemanniană a funcției de mai sus ca «lipsită de frontieră». Vom vedea efectiv, puțin mai departe, că această noțiune poate fi perfect precizată și formulată într-o definiție generală riguroasă.

Iată însă înainte alte cîteva exemple simple de suprafețe riemanniene.

22. Să considerăm funcția

$$u = e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} + e^{\frac{1}{z-1}}.$$

Funcția nu posedă elemente polare. Ea are la ∞ un element critic algebric. Pentru a descompune în foi simple suprafața ei riemanniană, să facem tăietura K, de exemplu, în lungul axei imaginare pozitive de la 0 la ∞. Domeniul Δ rămas din (z) este simplu conex. În el se află un punct $z = 1$, punct singular esențial pentru f, dar în jurul căruia funcția este uniformă.

Suprafața riemanniană R se compune din două foi simple așezate peste Δ', format din Δ din care am scos punctul $z = 1$. Trecerea de pe o foaie pe alta se face, ca și mai sus, străbătînd tăietura K dar *numai* între extremitățile sale, deoarece pe cînd în exemplul din paragraful precedent extremitățile lui K erau proiecții ale unor elemente ale lui f, care se găseau simultan pe ambele foi ale lui R, aici 0 nu mai este proiecție de element al lui f. Suprafața R acoperă deci planul (z) fără punctele 0 și 1 **.

---

* Se vede îndată că u este reprezentabil în vecinătatea lui $z = -1$ (ca și în vecinătatea lui $z' = 0$, după schimbarea de variabilă $z = \frac{1}{z'}$) prin seriile caracteristice punctelor critice algebrice cu $p = 2$.

** Punctul $z = 0$ este un exemplu de punct critic în jurul căruia se permută numai două determinări, dar care nu este totuși punct critic algebric ci punct singular esențial.

23. Funcția $\log z$ are două puncte singulare, ambele critice transcendente: $z = 0$ și $z = \infty$. Dacă le unim printr-o tăietură K, se vede îndată că suprafața riemanniană este formată dintr-o infinitate de foi simple acoperind domeniul Δ, trecerea de la o foaie la cea următoare făcîndu-se prin K între extremitățile sale.

Funcția

$$u = \sqrt{\log z}$$

are și ea o suprafață R care poate fi împărțită în domenii printr-o tăietură K, unind 0 cu ∞ în lungul axei imaginare pozitive, de exemplu. Aceste domenii sînt foi simple, în afară de unul, care cuprinde elementul critic algebric cu proiecția în $z = 1$ și care provine din determinarea 0 a lui $\log z$ pentru $z = 1$. Într-adevăr, în jurul lui $z = 1$ avem, pentru această determinare,

$$\log z = \log [1 + (z-1)] = \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots,$$

adică

$$u = (z-1)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{3} - \dots \right]^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Domeniul acesta excepțional este deci format din două foi simple, pe care elementul critic algebric se află simultan.

24. Tipul topologic al unei suprafețe riemanniene. Ne-am ocupat în paragrafele precedente, în mod special, de modul de acoperire a planului (z) prin suprafețele riemanniene ale anumitor funcții.

Ne vom fixa acum atenția asupra tipului topologic al lui R, adică asupra varietății V a lui R.

În exemplul din § 21 am constatat că R, deci V, trebuie oarecum considerat ca lipsit de frontieră, adică R ar fi ceea ce ar corespunde noțiunii intuitive de «suprafață închisă».

Pentru a preciza acest fapt, formulăm următoarea definiție:

Un spațiu topologic S se numește *compact* dacă orice mulțime infinită de elemente distincte ale lui S are cel puțin un punct de acumulare în S *.

Sfera sau torul (suprafață generată prin rotația unui cerc în jurul unui ax așezat în planul său, fără să taie cercul) ca și torul generalizat (suprafața analogă cu $n > 1$ găuri) sînt spații compacte.

Planul euclidian nu este un spațiu compact.

O suprafață riemanniană R al cărei tip topologic V este compact se numește *compactă* (sau *închisă*); o suprafață riemanniană necompactă se numește și *deschisă* **.

---

* Se poate observa că o mulțime compactă din plan, astfel cum a fost definită această noțiune în capitolul I, constituie efectiv un spațiu compact în sensul definit aici.

** Aceste noțiuni, exprimînd proprietăți topologice intrinsece ale spațiului respectiv, nu trebuie confundate cu acelea de *mulțime închisă* (sau deschisă), care exprimă proprietăți relative la spațiul din care face parte mulțimea.

25. Distincția între suprafețe riemanniene închise și deschise este foarte importantă pentru teoria generală a funcțiilor analitice.

Într-adevăr, vom vedea că acestei distincții de natură topologică îi corespunde întocmai o distincție de natură pur analitică pentru funcțiile corespunzătoare.

Să cercetăm însă mai întîi cîteva exemple.

Să considerăm funcția

$$u = \sqrt{z^2 - 1}.$$

Cele două foi acoperă planul complex (z) și se unesc în lungul tăieturii $(-1, +1)$, care este formată din *două* segmente suprapuse, avînd extremitățile $z = \pm 1$ în comun.

În lungul acestor segmente se face trecerea de la o foaie la cealaltă, străbătînd segmentul de jos în sus, sau invers.

Pentru a ne da seama de tipul topologic al suprafeței riemanniene, să ne închipuim planul (z) reprezentat pe sfera lui Riemann și segmentul dublu $(-1, +1)$ așezat pe ecuator. Cele două foi învelesc sfera și au în comun extremitățile segmentului dublu (fig. 28).

Să transformăm, prin simetrie față de planul ecuatorial, foaia interioară, lăsînd pe cea exterioară cum a fost. Nu s-a produs nici o ruptură. Noua figură este formată tot din două foi învelind sfera, dar trecerea de la una la alta nu se mai face străbătînd segmentul dublu $(-1, +1)$, ci revenind înapoi pe aceeași emisferă (fig. 29). Cele două segmente suprapuse se pot deci despărți, depărtîndu-le unul de altul, fără a rupe suprafața (fig 30).

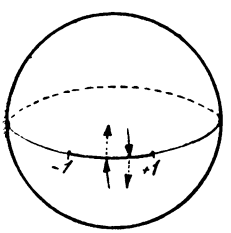


Fig. 28

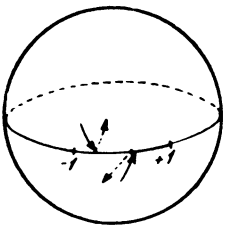


Fig. 29

Depărtîndu-le tot mai mult unul de altul (dar menținînd extremitățile comune) se obține, prin deformare fără ruptură, un dublu disc, în care cele două segmente formează marginea comună a celor două foi ale discului.

Umflînd acum discul, prin depărtarea una de alta a celor două foi ale sale, se obține o sferă.

Toate aceste deformări continue fără ruptură reprezintă omeomorfii; deci, tipul topologic al suprafeței riemanniene este aici cel al sferei.

Dacă în loc de $\sqrt{z^2 - 1}$, am avea

$$u = \sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - 4)},$$

am obține, prin aceleași deformări, un *tor*, întrebuințînd, în locul dublului

segment de mai sus, două segmente duble $(-2, -1)$ și $(+1, +2)$ de același fel (fig. 31).

Într-adevăr, operînd cu unul din acestea, ca în cazul precedent cu $(-1,1)$ mai rămîne în forma finală a discului o gaură formată prin depărtarea unul de altul a segmentelor suprapuse ale celuilalt segment dublu.

Dacă, în general, luăm $u = \sqrt{P(z)}$ cu $P(z)$ polinom de gradul $2n$, vom obține la fel un *tor generalizat cu* $n - 1$ *găuri*.

Fiecare din aceste suprafețe este de *alt* tip topologic.

Nu poate, într-adevăr, exista corespondență biunivocă și bicontinuă între un tor cu n găuri și unul cu n' găuri, dacă $n' \neq n$.

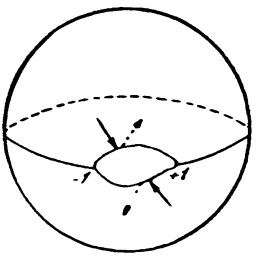


Fig. 30

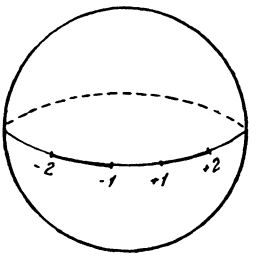


Fig. 31

26. Se demonstrează, în topologie, că o suprafață riemanniană compactă nu poate avea alt tip topologic decît al unui tor generalizat cu un număr (întotdeauna finit) de găuri. Să cercetăm acum care este tipul topologic al suprafeței riemanniene, deja examinate mai sus, a funcției

$$u = \sqrt{\log z}.$$

Să facem schimbarea de variabilă (t = altă variabilă complexă)

$$z = e^{t^2}.$$

Vom avea atunci reprezentatrea paramerică

$$u = t \qquad z = e^{t^2}$$

a suprafeței riemanniene, fiecărei valori t corespunzîndu-i un element al acestei suprafețe și invers, adică o omeomorfie. Or, t descrie tot planul (t) *fără punctul* ∞. Deci, suprafața riemanniană a funcției este omeomorfă cu sfera punctată, adică cu planul euclidian.

Tot astfel vom găsi același tip topologic pentru suprafața riemanniană a funcției

$$u = \frac{\log z}{\sqrt{z}},$$

punînd $z = e^{2t}$.

Vom avea $u = 2t\, e^{-t}$, variabila t descriind iarăși tot planul euclidian.

27. Să considerăm acum funcția

$$u = \frac{\ln z}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Punînd $z = e^t$, vom obține

$$u = \frac{t}{\sqrt{e^{2t} - 1}}.$$

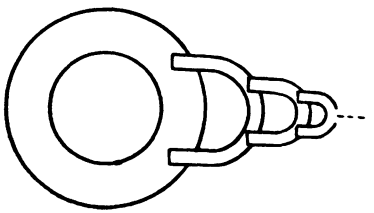


Fig. 32

Aceasta din urmă, tratată în mod analog cu exemplele $u = \sqrt{P(z)}$ (unde $P(z)$ era un polinom), arată că suprafața riemanniană a lui u poate fi deformată într-un fel de tor cu o infinitate de găuri, format dintr-un șir infinit de inele, fixate fiecare pe precedentul, cum se arată în figura 32. O asemenea suprafață *nu* mai este însă compactă; un șir de puncte luate succesiv, pe fiecare inel cîte unul, nu mai are punct de acumulare pe suprafață.

III. FUNCȚII ALGEBRICE

28. Una din consecințele cele mai directe și totodată cele mai importante ale considerațiilor dezvoltate în secțiunea precedentă este caracterizarea completă a funcțiilor algebrice printr-o proprietate pur topologică a suprafețelor lor riemanniene.

După cum vom vedea, printre toate funcțiile analitice, funcțiile algebrice sînt singurele ale căror suprafețe riemanniene sînt *compacte*.

O funcție analitică $u = f(z)$ se numește *algebrică* dacă există un polinom $F(z, u)$, de variabilele independente z și u, astfel ca, oricare ar fi z, avem

$$F[z, f(z)] = 0. \tag{7}$$

În mod precis, $f(z)$ este algebrică dacă, $S(z - z_0)$ fiind seria unui element ordinar e_0 al lui f, avem

$$F[z, S(z - z_0)] = 0, \tag{8}$$

oricare ar fi z în cercul de convergență al lui e_0.

Se arată cu ușurință că este suficient ca (8) să aibă loc pentru un singur element ordinar al lui f pentru ca toate celelalte elemente ordinare și (cu precizările care sînt conforme cu cele spuse mai sus*) toate celelalte elemente ale funcției să satisfacă aceeași relație (8).

Să considerăm, într-adevăr, prelungirea elementului e_0 pe un drum L care pleacă din z_0.

* Aceste precizări sînt relative la valoarea ∞ a funcției și la diversele ei determinări în cazul elementelor critice.

Dacă, pentru un element astfel obținut, relația (8) nu mai este satisfăcută, să numim e' elementele care se bucură de proprietatea că pînă la e' relația (8) este satisfăcută. Pe L centrele elementelor e' formează un arc σ avînd o extremitate în z_0.

Fie z_1 cealaltă extremitate pe L a acestui arc și $S(z-z_1)$ seria elementului e_1 corespunzător. Arcul σ avînd o extremitate în z_1 pătrunde în cercul de convergență al lui e_1.

Avem, pe σ,

$$F[z, S(z-z_1)] = 0. \tag{9}$$

Membrul întîi al lui (9), fiind în cercul de convergență al lui e_1 o funcție olomorfă de z (cel puțin în afară de $z = z_1$), trebuie deci să fie identic nul în acest cerc, ceea ce demonstrează afirmația noastră.

29. Singularitățile funcțiilor algebrice. Fie $u = f(z)$ o funcție algebrică, satisfăcînd relația (7) de mai sus.

Vom arăta că punctele singulare ale lui $f(z)$ sînt poli sau puncte critice algebrice, adică singularități pe care le-am numit dinainte *algebrice* (a se vedea nota de la § 7 al secțiunii I a acestui capitol).

Să pornim din z_0, proiecția elementului inițial ordinar e_0 al lui f, și să facem prelungirea în lungul unui drum L oarecare din planul (z) prin elemente ordinare weierstrassiene.

Fie a un punct singular pe care îl întîlnim astfel pe L.

Vom demonstra, în primul rînd, următoarele:

1° Cînd proiecția z a elementelor succesive de prelungire pe L *tinde către punctul* a, *punctul* $u = f(z)$ *tinde către o limită bine determinată din planul* (u), *finită sau infinită**.

Într-adevăr, dacă pentru $z \to a$ (pe L) $u = f(z)$ nu ar tinde către o limită determinată, ar trebui să existe două puncte *distincte*, b și b' în planul (u), astfel ca, pentru un anumit șir de puncte z_n de pe L, cu $\lim_{n\to\infty} z_n = a$**, să avem

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = b$$

și pentru un alt șir z'_n de pe L, tot cu $\lim_{n\to\infty} z'_n = a$, să avem

$$\lim_{n\to\infty} u'_n = \lim_{n\to\infty} f(z'_n) = b'.$$

Să descriem, din b ca centru, un mic cerc γ, care lasă pe b' în afară și care este ales astfel încît nu trece prin nici o rădăcină a ecuației în u dată prin

$$F(a, u) = 0. \tag{10}$$

---

* Proprietatea are loc, evident întotdeauna, dacă a este ordinar. Scopul propoziției este de a arăta că, în *cazul funcțiilor algebrice*, ea are loc și pentru punctele singulare.

Limita b a lui u este, evident, rădăcină a ecuației algebrice $F(a, u) = 0$.

** Ori de cîte ori vom considera puncte z_n pe un drum continuu L, vom înțelege prin $\lim_{n\to\infty} z_n$ limita lui z (t_n) cînd t_n tinde către valoarea parametrului t al lui L în punctul limită $z = a$.

Pe drumul din planul (u) care corespunde, prin transformarea $u = f(z)$, lui L din planul (z), punctele u'_n tind către b', pe cînd punctele u_n tind către b. Este clar atunci că se va găsi, pe L, un al treilea șir z''_n, tot cu $\lim_{n\to\infty} z''_n = a$, astfel ca $u''_n = f(z''_n)$ să se găsească, toate, pe circumferința lui γ (fig. 33). Or, acești u''_n nu pot cădea numai într-un număr finit de puncte distincte pe γ, deoarece z''_n de la care provin sînt în număr infinit și fiecare u''_n nu poate proveni decît de la cel mult m puncte z''_n, dacă m este gradul lui $F(z, u)$ în z (știm că trebuie să avem $F(z''_n, u''_n) = 0$, oricare ar fi n).

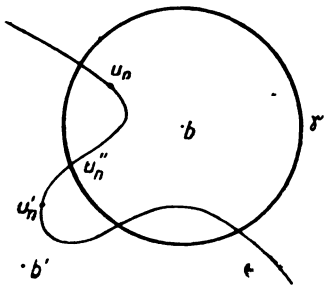


Fig. 33

Deci, pe circumferința lui γ există *cel puțin un punct de acumulare de* u''_n.

Fie $\overline{u}$ un astfel de punct.

Există un șir de z''_n (extras din șirul tuturor z''_n) tinzînd și el către a pe L, astfel încît $u''_n = f(z''_n)$ tinde către $\overline{u}$. Relația

$$F(z''_n,\ u''_n) = 0$$

arată atunci că trebuie să avem

$$F(a,\ \overline{u}) = 0.$$

Or, aceasta constituie o contrazicere, deoarece $\overline{u}$ este pe circumferința lui γ, care, prin alegerea sa, nu conține nici o rădăcină a lui (10).

Din raționamentul de mai sus se vede deci că

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

este determinată în orice caz, adică $u = f(z)$ nu poate oscila între mai multe valori cînd $z \to a$ pe L. Această limită determinată poate fi însă ∞.

Proprietatea 1° este astfel demonstrată.

Pentru completarea proprietății 1° vom arăta acum următoarele:

2° Dacă $z = a$ este un punct singular al lui $u = f(z)$, iar $z = b$ limita (finită sau ∞) către care tinde u cînd $z \to a$ pe L (limită a cărei existență a fost tocmai demonstrată), *atunci perechea de valori* (a, b) *satisface simultan relațiile*

$$F(a, b) = 0,\quad F'_u(a,b) = 0. \tag{11}$$

Proprietatea aceasta va rezulta din clasica teoremă a funcțiilor implicite din domeniul real și din ecuațiile lui Cauchy pe care le satisfac funcțiile monogene.

Cu $z = x + iy$, $u = s + it$, putem scrie polinomul $F(z, u)$ astfel

$$F(z, u) = A(x, y, s, t) + i\,B(x, y, s, t),$$

punînd în evidență partea reală A și cea imaginară B.

Considerat ca funcție de z (u = const.), F este polinom, deci funcție monogenă.

Avem deci relațiile lui Cauchy

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial x}.$$

Considerat ca funcție de u (z = const.), F este iarăși monogen și deci avem:

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial s}.$$

Pe de altă parte, relația $F(z, u) = 0$ este echivalentă cu

$$\begin{cases} A(x, y, s, t) = 0 \\ B(x, y, s, t) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Să aplicăm aici teorema clasică a funcțiilor implicite.

Fie pentru aceasta $z_0 = x_0 + i y_0$ și $u_0 = s_0 + i t_0$ un sistem de valori care anulează pe $F(z, u)$.

Valorile reale x_0, y_0, s_0, t_0 vor satisface sistemul (12).

Fie $F'_u(z_0, u_0) \neq 0$.

Aceasta echivalează cu

$$\left(\frac{D(A, B)}{D(s, t)}\right)_0 \neq 0, \tag{12}$$

indicele 0, jos în dreapta, însemnînd că valoarea determinantului funcțional este luată pentru $x = x_0$, $y = y_0$, $s = s_0$, $t = t_0$.

În aceste condiții, teorema funcțiilor implicite spune că:

1) *Există* un sistem — soluție

$$\begin{aligned} s &= P(x, y) \\ t &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{14}$$

al sistemului dat (12), cu P și Q continue în vecinătatea lui (x_0, y_0), și astfel ca

$$\begin{aligned} s_0 &= P(x_0, y_0) \\ t_0 &= Q(x_0, y_0). \end{aligned}$$

2. Soluția este *unică* cu aceste condiții.

Această unicitate este importantă aici.

Derivatele parțiale de primul ordin ale lui P și Q există, sînt continue și se obțin îndată prin derivarea relațiilor (12) pe care aceste funcții le satisfac*).

---

* Existența și exprimarea acestor derivate parțiale prin derivarea lui (12), după înlocuirea lui s și t prin P și Q, presupune existența și continuitatea derivatelor parțiale ale funcțiilor A și B, ceea ce este cazul aici, $F(z, u)$ deci $A(x, y, s, t)$ și $B(x, y, s, t)$ fiind polinoame. Rezultă că și derivatele lui P și Q sînt continue.

Ținînd seama de cele două perechi de relații ale lui Cauchy, relative la A și B, se verifică imediat că avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

comparînd expresiile obținute pentru aceste derivate.

Prin urmare, funcția complexă $P(x, y) + i\,Q(x, y) = \varphi(z)$, formată cu soluția (14) a sistemului (12), este olomorfă în vecinătatea lui z_0.

De unde, următoarea propoziție:

Fiind dat polinomul $F(z, u)$ în z și u și un sistem (z_0, u_0) de valori care satisface simultan la $F(z_0, u_0) = 0$, $F'_u(z_0, u_0) \neq 0$, există o funcție unică $u = \varphi(z)$, satisfăcînd la $F[z, \varphi(z)] = 0$ în vecinătatea lui $z = z_0$ și astfel ca $u_0 = \varphi(z_0)$.

În plus, această soluție este funcție olomorfă în jurul lui $z = z_0$.

Am văzut că limita b, către care tinde $u = f(z)$, satisface întotdeauna prima relație (11).

Or, dacă $F'_u(a, b) \neq 0$, există o funcție unică $u = \varphi(z)$ cu $b = \varphi(a)$ și $F[z, \varphi(z)] = 0$ și aceasta este olomorfă în $z = a$.

Deci, $z = a$ nu este *singular* pentru $u = f(z)$ decît dacă, pe lîngă relația primă din (11), este satisfăcută și cea de-a doua.

Aceasta constituie tocmai proprietatea 2° a singularităților funcțiilor algebrice.

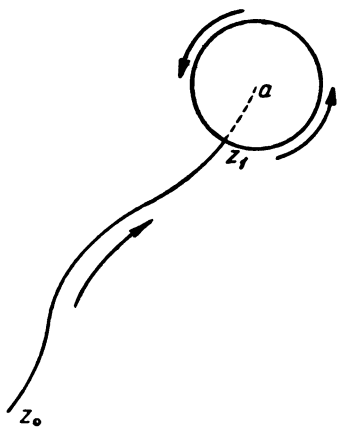


Fig. 34

30. Cu aceste două propoziții preliminare stabilite, abordăm acum studiul singularităților.

Din cele ce preced, poziția singularităților în planul (z) este cunoscută.

Relația $F(z, u) = 0$, la care satisface funcția $u = f(z)$, fiind dată, sistemul

$$F(z, u) = F'_u(z, u) = 0 \qquad (15)$$

ne va indica singurele puncte din planul (z) care *pot fi* puncte singulare de orice fel pentru $f(z)$. Or, sistemul (15) de mai sus este algebric. Eliminarea lui u ne va duce la o ecuație algebrică în z, ale cărei rădăcini ne vor da punctele din (z) unde pot fi singularități ale lui $f(z)$. Aceste puncte sînt deci în număr *finit*.

Fie a un asemenea punct și (a) mulțimea acestor puncte.

Venind din z_0 cu prelungirea în lungul unui drum L care nu trece prin nici un punct (a), nu vom putea întîlni singularități și prelungirea se va putea efectua, cu siguranță, cel puțin pînă la a.

Să presupunem că ea nu poate trece de a, deci că a este singular.

Dintr-un punct z_1, ales pe L înaintea lui a (fig. 34), să ne abatem atunci cu prelungirea de pe L, urmînd, în sensul săgeților din figură, o mică circum-

ferință cu centrul a, care nu mai conține alt punct (a). Prelungirea se va putea continua deci pe toată această circumferință și vom reveni în z_1 cu un element ordinar, care poate fi același cu cel de plecare, sau altul. În orice caz, după un număr *finit* [egal cel mult cu gradul lui $F(z, u)$ în u] de parcursuri, va trebui să revenim în z_1 cu un element deja obținut, să presupunem cu elementul inițial.

Fie p numărul de ori de cîte ori am parcurs astfel circuitul. Funcția $f(z)$ va avea în $z = a$ un punct critic cu p determinări în jurul lui, toate aceste determinări neavînd alt punct singular decît $z = a$. Pe de altă parte, cînd $z \to a$, funcția tinde, după cum am văzut, către o valoare determinată.

Astfel stînd lucrurile, să facem schimbarea de variabilă $z = a + t^p$ în $u = f(z)$. Atunci u devine o funcție uniformă de t în vecinătatea originii, care tinde către o limită determinată pentru $t \to 0$; deci $u = f(a + t^p) = g(t)$ are n $t = 0$ un punct ordinar (dacă limita este finită) sau un pol ordinar (dacă imita este ∞).

Avem deci în jurul lui $t = 0$

$$g(t) = \sum_{n=\mu}^{\infty} \alpha_n t^n,$$

cu $\mu \geqslant 0$ în cazul ordinar și $\mu < 0$ în cazul polar.

Dacă revenim la z se vede că, în jurul lui $z = a$, avem dezvoltarea

$$f(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} \alpha_n (z - a)^{\frac{n}{p}},$$

ceea ce arată că $z = a$ este pentru $f(z)$ un punct critic algebric ($\mu \geqslant 0$) sau critic polar ($\mu < 0$).

În particular, s-ar putea ca $p = 1$. Atunci $f(z)$ ar avea în $z = a$ un punct ordinar sau un pol ordinar.

În toate cazurile se vede că $z = a$ nu poate fi altă singularitate decît un punct critic algebric, pol ordinar sau critic. Punctul $z = \infty$ se tratează exact la fel, pentru că prin transformarea $z = \frac{1}{z'}$ funcția $F(z, u)$ păstrează forma de polinom și $z = \infty$ devine $z' = 0$, adică un punct la distanță finită în planul (z').

Deci *singurele puncte singulare pe care le poate avea o funcție algebrică, atît la distanță finită cît și la* ∞, *sînt puncte critice algebrice sau polare și poli ordinari* (puncte singulare «algebrice»).

Tuturor acestor puncte le corespund elemente ale domeniului riemannian de existență al funcției. Este deci de prevăzut că suprafața riemanniană va fi închisă, ceea ce ne propunem acum să demonstrăm.

31. Cele arătate în ultimele paragrafe pot fi exprimate după cum urmează:

Fiind dat un drum L, definit prin funcția complexă $z = \psi(s)$ de variabilă reală s, funcție continuă în intervalul închis $[0,1]$, cu $\psi(0) = z_0$ și $\psi(1) = a$:

1° Există cel puțin un element și cel mult un număr finit* de elemente E_a ale funcției algebrice f, cu proiecția în $z = a$.

---

* Într-adevăr, acest număr este cel mult egal cu gradul m al lui $F(z\ u)$ în u.

2° Elementele e^{μ}, de prelungire ale lui e_0 în lungul lui L, *tind* către unul din elementele E_a pentru $s \to 1$, în sensul potrivit topologiei introduse în § 14 în mulțimea elementelor care constituie domeniul de existență riemannian al lui f.

Vom deduce de aici că *suprafața riemanniană a funcției f este compactă.*

Să considerăm, pe tipul topologic V al suprafeței riemanniene R a lui f, o infinitate arbitrară de elemente distincte (e). Cum nu pot exista mai mult de m elemente cu aceeași proiecție pe (z), elementele (e) se proiectează într-o infinitate de puncte z distincte. Acestea au deci pe (z) un punct de acumulare cel puțin, fie Z. Putem alege, dintre aceste puncte z, un șir z_n $(n = 0, 1, 2,...)$ de puncte distincte între ele și de punctele singulare ale lui f, astfel ca $\lim_{n \to \infty} z_n = Z$.

Fie e_n^{μ} cele m elemente ale lui V care se proiectează în z_n. Să luăm un drum L definit prin $z = \psi(s)$, trecînd succesiv prin toate punctele z_n în ordinea indicilor crescători și tinzînd către Z pentru $s \to 1$. Drumul L se poate alege, evident, astfel ca el să evite punctele singulare ale lui f care, am văzut, sînt în număr finit. După 1° și 2° de mai sus, prelungirea fiecăruia din elementele e_0^{μ} în lungul lui L duce la elemente e_s^{μ} care, pentru $s \to 1$, tind către unul din elementele lui V care se proiectează în Z, fie E^{μ} (remarcăm că putem avea $E^{\mu} = E^{\mu'}$ pentru $\mu = \mu'$). Pe V avem astfel m drumuri L^{μ} care duc de la elementele e_0^{μ}, la elementele E^{μ}. Cum numărul acestor drumuri este finit și cum reuniunea lor conține mulțimea (e_n), unul cel puțin din aceste drumuri L^{μ_0} conține o infinitate de elemente din (e_n) și deci elementul E^{μ_0} este punct de acumulare pentru mulțimea (e_n).

32. *Reciproc, dacă R, suprafața riemanniană a unei funcții analitice f este compactă, funcția este algebrică.*

R fiind compactă, într-un punct al planului (z) nu se pot proiecta un număr infinit de elemente ale lui V, deoarece această infinitate nu ar putea avea nici un element de acumulare pe V. Vom arăta că numărul k de elemente care se proiectează într-un punct oarecare al lui (z) este constant, în afară de un număr finit de puncte din (z), unde numărul poate fi mai mic.

Mai întîi este clar că numărul elementelor critice ale lui R este finit. Altfel, într-adevăr, ar trebui, suprafața fiind compactă, să existe un element de acumulare al lor care nu ar mai putea fi nici ordinar, nici polar, nici critic algebric, prin însăși definiția acestor elemente cu ajutorul seriilor lor respective. Astfel stînd lucrurile, să unim printr-un drum L două puncte oarecare z_1 și z_2 în care nu se proiectează nici un element critic.

Fie k_1 și k_2 numărul respectiv al elementelor proiectate în z_1 și z_2.

Putem alege drumul L astfel ca el să nu treacă prin nici o proiecție de element critic. Atunci, este clar că orice element e_1 din z_1 va trebui să ducă la un element e_2 din z_2 și numai la unul singur, și, reciproc, două elemente distincte nu vor putea duce la același element.

Prin urmare,

$$k_1 = k_2 = k.$$

În celelalte puncte unde se proiectează elemente critice, numărul foilor elementelor va fi tot k, deci numărul elementelor va fi mai mic decît k.

Să ducem acum, prin punctele în care se proiectează un element critic cel puțin, tăieturile care descompun suprafața riemanniană R a lui f în foi simple și fie $u_1(z)$, $u_2(z)$,..., $u_k(z)$ ramurile uniforme corespunzătoare ale funcției $f(z)$.

Orice funcție *simetrică*, ca de exemplu cele elementare,

$$S_1(z) = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$$
$$S_2(z) = u_1 u_2 + u_1 u_3 + \ldots u_{k-1} u_k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_k(z) = u_1 u_2 \ldots u_k$$

va fi neapărat uniformă pe (z), deoarece, în jurul punctelor critice, ramurile respective se permută circular astfel încît funcțiile simetrice nu își schimbă valoarea.

Cum, pe de altă parte, $S_1(z), \ldots, S_k(z)$ nu pot avea alte puncte singulare decît cele ale lui $f(z)$, se vede, după teorema relativă la funcțiile raționale (cap. VI, § 2,), că toate aceste funcții sînt raționale.

Deci avem, pentru $u = f(z)$,

$$u^k - S_1(z)\ u^{k-1} + \ldots + (-1)^k S^k(z) = 0,$$

cu $S(z)$ raționale.

Adică $u = f(z)$ satisface o relație

$$F(z,u) = 0,$$

unde F este *polinom în z și u.*

Funcția este deci algebrică.

33. Se vede deci că suprafața riemanniană compactă este caracteristică pentru funcțiile algebrice.

Teorema relativă la funcțiile raționale nu este decît un caz particular al acestui din urmă rezultat, anume cazul cînd suprafața are o singură foaie și funcția este uniformă.

Prin urmare, putem enunța următoarea teoremă generală care arată corelația dintre natura geometrică a suprafeței riemanniene a unei funcții și caracterul analitic al acestei funcții:

Pentru ca suprafața riemanniană a unei funcții analitice să fie închisă este necesar și suficient ca funcția să fie algebrică.

34. Alte proprietăți ale funcțiilor algebrice. Raționamentul de mai sus dă și un criteriu de reductibilitate și ireductibilitate a polinoamelor $F(z, u)$.

Se spune că $F(z, u)$ este *reductibil* dacă avem

$$F(z, u) = F_1(z, u) \cdot F_2(z, u),$$

F_1 și F_2 fiind polinoame de grad $\geqslant 1$.

Este clar mai întîi, după cele arătate mai sus, că, în cazul reductibilității, toate elementele care satisfac la $F(z, u) = 0$ nu formează o singură suprafață, ci cel puțin atîtea suprafețe în cîți factori se descompune $F(z, u)$. Se arată

cu ușurință că numărul acestor suprafețe este exact numărul factorilor ireductibili ai lui $F(z, u)$.

Pentru aceasta, este suficient să arătăm că un polinom ireductibil nu definește decît o singură funcție algebrică, și deci o singură suprafață riemanniană.

Raționamentul făcut mai sus pentru a arăta că funcția $f(z)$ care corespunde unei suprafețe compacte este algebrică arată că, dacă elementele provenite dintr-un e_0 care satisface la $F(z, u) = 0$ nu ar epuiza toate elementele ce satisfac această relație, elementele provenite din e_0 ar forma și ele o funcție algebrică satisfăcînd o relație

$$F_1(z, u) = 0,$$

toate elementele ce satisfac această din urmă relație făcînd parte din funcția f.

Dar atunci, $F_1 = 0$ trebuie să atragă neapărat $F = 0$.

Deci am avea

$$F(z, u) = F_1(z, u) \cdot F_2(z, u).$$

Dacă $F_1(z, u) = 0$ nu ar cuprinde toate elementele care satisfac la $F(z, u) = 0$, ar trebui ca $F_2(z, u)$ să fie cel puțin de gradul 1. Or, aceasta ar implica reductibilitatea lui $F(z, u)$, ceea ce este contrar ipotezei.

Prin urmare,

O relație algebrică $F(z, u) = 0$ ireductibilă definește o singură funcție algebrică, iar o relație reductibilă de același tip definește atîtea funcții algebrice cîți factori ireductibili conține $F(z, u)$.

Fiecărei funcții algebrice îi corespunde o suprafață riemanniană.

Deci, elementele ce satisfac o relație dată $F(z, u) = 0$ se repartizează în atîtea suprafețe cîți factori ireductibili sînt cuprinși în $F(z, u)$.

35. Ne oprim aici cu considerațiile asupra funcțiilor algebrice.

Teoria funcțiilor algebrice constituie unul din capitolele cele mai importante ale teoriei funcțiilor, avînd numeroase conexiuni și cu alte discipline matematice*.

În cele ce preced am urmărit mai ales să punem în evidență rolul fundamental pe care îl joacă, în teoria funcțiilor analitice multiforme, conceptul de suprafață riemanniană atașată unei astfel de funcții. Cele mai adînci proprietăți ale funcțiilor și ale claselor de funcții se reflectă în proprietățile suprafețelor riemanniene respective.

În particular, funcțiile algebrice — ale căror suprafețe riemanniene, am văzut, sînt caracterizate prin *compactitate* — se clasifică, în primul rînd, după tipul topologic al suprafeței compacte corespunzătoare. Acest tip, întotdeauna un tor generalizat, este complet definit prin numărul p al găurilor sale.

Am văzut, pe de altă parte, în secțiunea a II-a a acestui capitol că există funcții algebrice [și exemplele considerate erau toate de tipul $u^2 - P(z) = 0$,

* Se poate consulta în această privință tratatul lui N. G. Cebotarev, *Teoria alghebraiceskih funcții*, Oghiz-Gostehizdat, Moscova-Leningrad, 1948.

unde $P(z)$ este un polinom] pentru care p este un număr întreg oarecare $\geqslant 0$. Numărul p reprezintă ceea ce se numește *genul* funcției algebrice. El poate fi definit și direct după relația $F(z, u) = 0$ prin proprietățile analitice sau geometrice ale funcției sau curbei algebrice corespunzătoare. Funcțiile algebrice de gen *zero* (deci a căror suprafață riemanniană este topologic echivalentă cu sfera) definesc curbele așa-zise unicursale. Cele de gen *unu* sînt în legătură cu funcțiile meromorfe dublu periodice.

Modul de acoperire a planului (z) de către suprafața riemanniană, felul și numărul elementelor sale critice, joacă de asemenea un rol important în cunoașterea și clasificarea funcțiilor algebrice.

Vom cerceta, în ultimul capitol al acestui volum, cîteva chestiuni în această ordine de idei și vom da cîteva aplicații importante ale funcțiilor multiforme la studiul unor proprietăți ale funcțiilor uniforme.

CAPITOLUL XI

APLICAȚII ALE FUNCȚIILOR MULTIFORME LA STUDIUL UNOR FUNCȚII UNIFORME

În acest ultim capitol vom examina mai îndeaproape unele funcții analitice multiforme și vom arăta legăturile lor cu unele din clasele de funcții uniforme considerate în capitolele precedente.

I. INTEGRALA ELIPTICĂ DE PRIMA SPEȚĂ ȘI FUNCȚIILE MEROMORFE DUBLU PERIODICE

1. Integralele funcțiilor algebrice constituie o categorie importantă de funcții analitice, al cărui studiu face obiectul așa-numitei teorii a integralelor și a funcțiilor abeliene. Din ele vom considera aici numai un caz special, strîns legat de teoria funcțiilor meromorfe dublu periodice.

Dacă $R(z, u)$ este o funcție rațională de cele două variabile z și u, iar $F(z, u)$, ca în capitolul precedent, un polinom în z și u, funcția

$$I(z) = \int_{z_0}^{z} R(z, u)\, dz, \tag{1}$$

unde, sub semnul integral, u este funcția algebrică de z definită prin

$$F(z, u) = 0, \tag{2}$$

se numește integrală *abeliană*.

Un caz particular deosebit de important al integralelor (1) îl constituie integralele numite hipereliptice, care corespund cazului cînd (2) este de forma

$$u^2 - P(z) = 0,$$

unde $P(z)$ este un polinom.

Studiul integralelor hipereliptice se reduce, prin operații elementare, la acela al unui număr finit de tipuri*. În cazul cînd gradul n al lui $P(z)$ este $\leqslant 2$, toate aceste integrale se exprimă, după cum se arată în calculul

* A se vedea, de exemplu, E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, Paris, 1942. t. I.

integral, prin funcții elementare. Cazul $n \geqslant 3$, dimpotrivă, duce la transcendente noi, care nu se mai exprimă cu ajutorul celor elementare.

Cînd $n > 2$ dar $\leqslant 4$, integrala hipereliptică se numește *eliptică*. Această denumire își are originea în faptul că primele integrale de acest fel s-au întîlnit cu ocazia calculului arcului de elipsă.

Ne vom ocupa aici numai de integrale eliptice, și anume de cea mai importantă dintre ele, numită și integrală de *prima speță*.

2. *Integrala eliptică de prima speță* este, prin definiție, integrala

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4}},$$

în care $c_0, c_1, \ldots, c_4$ sînt constante complexe oarecare, cele patru rădăcini ale polinomului de sub radical a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ fiind presupuse *distincte**.

Putem presupune întotdeauna că nici una din aceste rădăcini nu este zero și că am luat $z_0 = 0$, această situație obținîndu-se ușor prin schimbări liniare de variabilă foarte simple. Însemnînd cu $P(z)$ polinomul de gradul al IV-lea de sub radical și introducînd notația ζ pentru variabila de integrare, vom avea deci de studiat funcția

$$I(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}}, \tag{3}$$

drumul de integrare între 0 și z fiind oarecare.

Funcția $I(z)$ este multiformă, diversele ei determinări în punctul z depinzînd — într-o oarecare măsură — de drumul de integrare ales.

Ne vom ocupa mai întîi de singularitățile acestei funcții și de stabilirea unor relații care leagă între ele diversele determinări ale ei în același punct z

3. Se constată cu ușurință că toate singularitățile lui (3) sînt algebrice în sensul definit în capitolul precedent.

Într-adevăr, singularități la distanță finită nu pot fi decît zerourile polinomului $P(z)$, adică punctele a_k. Or, în jurul unui asemenea punct a avem, pentru radicalul din (3), dezvoltarea

$$\alpha_1 (\zeta - a)^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 (\zeta - a)^{\frac{3}{2}} + \alpha_3 (\zeta - a)^{\frac{5}{2}} + \ldots,$$

cu $\alpha_1 \neq 0$ și deci, pentru funcția de sub semnul integral, expresia

$$(\zeta - a)^{-\frac{1}{2}} [\beta_0 + \beta_1 (\zeta - a) + \beta_2 (\zeta - a)^2 + \ldots], \tag{4}$$

cu $\beta_0 = \frac{1}{\alpha_1}$.

Prin integrare, seria (4) dă o serie de același tip, dar care rămîne finită și în a.

Funcția $I(z)$ din (3) are deci în $z = a$ un punct critic algebric ordinar, în jurul căruia se permută două determinări ale funcției.

* Dacă două din aceste rădăcini ar fi egale între ele, un factor pătratic s-ar putea scoate de sub radical, iar integrala s-ar reduce la o integrală elementară. Vom presupune $c_4 \neq 0$, astfel ca toate rădăcinile să fie *finite*.

Dacă facem, în integrala din (3), schimbarea de variabilă $\zeta = \frac{1}{\zeta'}$, se constată îndată că funcția de sub semnul integral rămîne de același tip și deci că, pentru $z = \infty$, $I(z)$ are un punct ordinar sau un punct critic algebric ordinar.

În rezumat, funcția $I(z)$ nu are alte singularități decît puncte critice algebrice în jurul cărora se permută cîte două determinări ale funcției. Funcția nu are poli.

Să observăm, de pe acum, că dacă $I(z)$ nu este totuși o funcție algebrică, aceasta se datorește faptului că ea are o infinitate de determinări în fiecare punct, după cum vom vedea îndată. Suprafața riemanniană a funcției nu poate fi deci compactă.

4. Pentru a stabili o relație între diversele determinări ale lui $I(z)$ în același punct z, să luăm ca termen de comparație determinarea $I_0(z)$ obținută

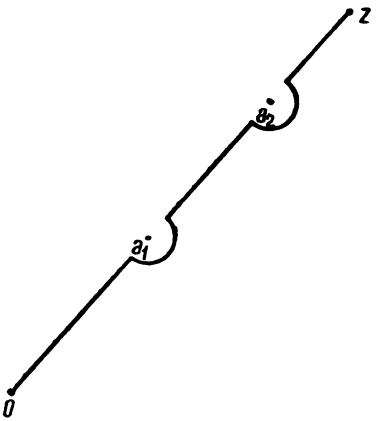


Fig. 35

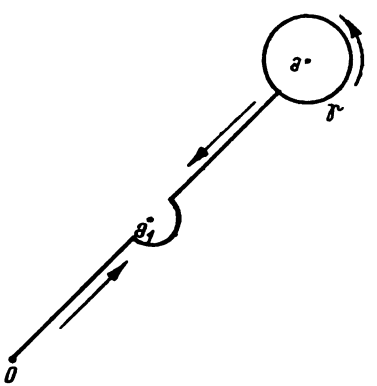


Fig. 36

prin integrare de la 0 la z, *pe drumul direct*. Vom alege ca drum direct segmentul de dreaptă cu extremitățile 0 și z în cazul cînd acest segment nu trece prin nici un punct a_k, iar în acest din urmă caz, drumul direct va fi cel format de același segment în care am înlocuit însă mici porțiuni din jurul punctelor a_k prin micile semicircumferințe respective avînd centrul într-un asemenea punct și ocolindu-l pe la dreapta, astfel cum se vede în figura 35. Dacă raza acestor semicircumferințe este destul de mică, integrala respectivă nu va depinde de această rază.

În afară de aceasta, vom introduce cîteva contururi de integrare ajutătoare, numite *contururi elementare* și definite după cum urmează : pentru fiecare a (dintre punctele a_k), conturul elementar de integrare va fi format din drumul direct pornind de la 0 spre a, drum pe care de la o mică distanță înainte de a îl vom înlocui prin circumferința γ cu centrul în a parcursă în sens direct (distanța de a și deci raza lui γ fiind aleasă destul de mică pentru ca γ să nu cuprindă alt punct a_k decît centrul său) și-l vom continua înapoi spre 0, pe porțiunea deja parcursă dar în sens contrar, astfel după cum se vede în figura 36.

Fie λ_k conturul elementar astfel definit, relativ la punctul critic a_k. Cantitatea

$$A_k = \int_{\lambda_k} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}}, \tag{5}$$

în care *valoarea inițială* a radicalului în $\zeta = 0$ a fost aleasă o dată pentru totdeauna *, nu depinde de raza cercului γ_k care intră în compunerea lui λ_k, dacă această rază a fost aleasă destul de mică, după cum s-a explicat mai sus.

Pe de altă parte, dacă punem

$$P(\zeta) = (\zeta - a_k)\, P_1(\zeta)$$

și

$$\max_{\zeta \in \gamma_k} \left| \frac{1}{P_1(\zeta)} \right| = M,$$

avem

$$\left| \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}} \right| = \left| \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{(\zeta - a_k)^{\frac{1}{2}} \sqrt{P_1(\zeta)}} \right| \leqslant 2\pi \rho^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}},$$

unde ρ este raza lui λ_k.

Deci, făcînd $\rho \to 0$, avem

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}} = 0. \tag{6}$$

Dar după ce, în conturul λ_k, variabila ζ a descris γ_k, am revenit în același punct al lui λ_k cu valoarea respectivă a radicalului înmulțită cu -1.

Prin urmare, ținînd seama de (5) și (6), avem

$$A_k = 2 \int_{\overrightarrow{Oa_k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}}, \tag{7}$$

integrala fiind luată pe drumul direct Oa_k, de la O la a_k, cu valoarea inițială a radicalului în $\zeta = 0$.

Să observăm că, în baza teoremei fundamentale a lui Cauchy, integrala (5), și deci (7), rămîne neschimbată dacă deformăm în mod continuu drumul de integrare (respectiv λ_k și Oa_k) fără a trece prin puncte a_k.

5. Considerînd acum un drum de integrare oarecare L, cu extremitățile O și z, vom exprima cu ajutorul lui $I_0(z)$ și al cantităților A_k din (7) valoarea lui $I(z)$ din (3) obținută prin integrare în lungul lui L pornind cu valoarea inițială din O, valoare pe care o notăm

$$I(z) = \int_L \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}}. \tag{8}$$

* Amintim că am presupus $P(0) \neq 0$.

Fie Γ conturul închis obținut unind pe z cu O prin drumul direct de la O la z.

Oricare ar fi L, Γ poate fi descompus într-un număr finit de contururi închise prin linii ajutătoare pornind din puncte convenabil alese de pe L la O, astfel ca, în interiorul unui asemenea contur, să nu se afle decît cel mult un singur a_k cu un singur contur elementar, acesta fiind eventual deformat continuu. Figura 37 arată pe un caz particular această descompunere. Liniile ajutătoare sînt cele figurate punctat; contururile închise respective sînt aici (dacă AB, BC etc. desemnează arcele respective de pe L, iar OA, OB etc. liniile ajutătoare) următoarele:

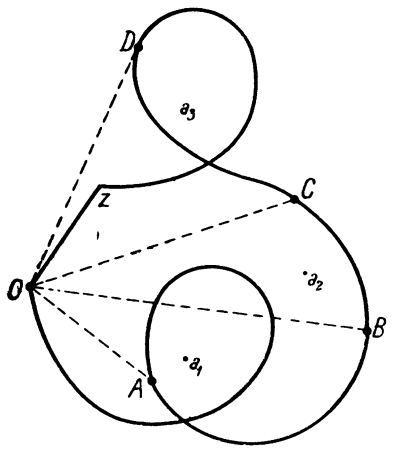


Fig. 37

$$\text{arc } (OA) + AO, \quad OA + \text{arc } (AB) + BO,$$

$$OB + \text{arc } (BC) + CO, \; OC + \text{arc } (CD) + DO$$

$$\text{și } OD + \text{arc } (Dz) + zO.$$

Suma integralelor luate pe aceste contururi închise este, evident, egală cu integrala luată pe Γ, deoarece fiecare linie ajutătoare este parcursă de două ori în sens contrar.

În exemplul de mai sus, primul și al doilea contur închis conțin fiecare numai pe a_1, al treilea conține numai pe a_2, al patrulea nici un a_k, iar ultimul conține numai pe a_3.

Fiecare din integralele respective este egală cu $\pm A_k$ cu un k determinat, sensul fiind unul sau altul după cum pentru descrierea conturului elementar echivalent trebuie să pornim din O cu valoarea inițială sau cu valoarea opusă ei.

Avem deci, oricare ar fi L,

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}} = \sum_{k=1}^{4} \mu_k A_k, \tag{9}$$

unde μ_k sînt numere întregi.

Pe de altă parte, se vede cu ușurință din comparația lui (5) cu (7), că (9) este valabil și cînd L trece prin puncte a_k.

Din (9) și (8) rezultă

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}} = I(z) + \int_{z0}^{\rightarrow} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}},$$

adică

$$I(z) = \sum_{k=1}^{4} \mu_k A_k \pm I_0(z), \tag{10}$$

semnul înaintea lui $I_0(z)$ fiind $+$ sau $-$, după cum $\sum_{k=1}^{4} \mu_k$ este par sau impar.

Într-adevăr, în primul caz, parcurgerea lui Γ ne aduce în $\zeta = 0$ cu valoarea inițială a radicalului astfel ca

$$\int_{z0}^{\rightarrow} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}} = -I_0(z),$$

iar în al doilea caz cu valoarea opusă ei.

6. Să observăm că fiecare din contururile închise în care am descompus pe Γ ne aduce în $\zeta = 0$ cu valoarea opusă celei de plecare dacă acest contur conține un a_k și cu valoarea cu care am plecat dacă el nu conține nici un a_k.

Putem deci scrie

$$\sum_{k=1}^{4} \mu_k A_k = A_{\alpha_1} - A_{\alpha_2} + A_{\alpha_3} - A_{\alpha_4} + \ldots \pm A_{\alpha_s}, \tag{11}$$

unde α_1, α_2, ... au valori dintre 1, 2, 3, 4, într-o ordine determinată de drumul L.

Să punem

$$A_1 - A_4 = \omega_1, \; A_2 - A_4 = \omega_2, \; A_3 - A_4 = \omega_3. \tag{12}$$

Cu aceste notații, (11) devine, în cazul cînd s este număr par,

$$\sum_{k=1}^{4} \mu_k A_k = \sum_{k=1}^{3} m_k \omega_k, \tag{13}$$

iar în cazul cînd s este număr impar,

$$\sum_{k=1}^{4} \mu_k A_k = A_4 + \sum_{k=1}^{3} m_k \omega_k, \tag{13}$$

m_k fiind, în fiecare caz, numere întregi.

Într-adevăr, oricare din diferențele $A_\alpha - A_{\alpha'}$ se poate scrie, în virtutea notațiilor (12), $\omega_\alpha - \omega_{\alpha'}$, dacă nici α, nici α' nu sînt egale cu 4, sau ω_α, în cazul cînd, de exemplu, $\alpha' = 4$.

Pe de altă parte, dacă s este impar, ultimul termen din (11) este egal cu $\omega_{\alpha_s} + A_4$ dacă $\alpha_s \neq 4$, sau cu A_4 dacă $\alpha_s = 4$.

Înlocuind (13) în (10), se obține

$$I(z) = \int_L \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}} = I_0(z) + \sum_{k=1}^{3} m_k \omega_k, \tag{14}$$

în cazul cînd s este par și

$$I(z) = \int_L \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}} = A_4 - I_0(z) + \sum_{k=1}^{3} m_k \omega_k, \tag{14'}$$

în cazul cînd s este impar.

Formulele (14) și (14') dau toate determinările lui $I(z)$ în punctul z al planului.

Drumul L se poate alege astfel ca m_k să fie întregi dați dinainte, cum se constată cu ușurință din (11).

7. O observație simplă ne arată că în (14) și (14') putem înlocui cele trei cantități ω_1, ω_2, ω_3 prin două dintre ele.

Într-adevăr, fie C un cerc cu centrul în O și raza R. Se vede îndată că

$$\lim_{R\to\infty} \int_C \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}} = 0,$$

polinomul de sub radical fiind de gradul 4.

Dar integrala din membrul întîi, după cum se constată îndată, este

$$A_{\alpha_1} - A_{\alpha_2} + A_{\alpha_3} - A_4 = \omega_{\alpha_1} - \omega_{\alpha_2} + \omega_{\alpha_3} = 0,$$

unde α_1, α_2, α_3 sînt numerele 1, 2, 3 într-o anumită ordine.

În (14) și (14') putem deci suprima, de exemplu, pe ω_3. Avem prin urmare, pentru determinările lui $I(z)$,

$$\left.\begin{aligned} I(z) &= I_0(z) + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \\ I(z) &= A - I_0(z) + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

(unde am scris A în loc de A_4), prima expresie fiind valabilă în cazul parității lui s, iar cea de-a doua în cazul imparității acestuia. Cantitățile ω_1 și ω_2 se numesc *perioadele integralei eliptice.*

8. Inversiunea integralei eliptice de prima speță. Formulele (15) arată că funcția $I(z)$, definită prin (3), este efectiv multiformă și că ea are o infinitate de ramuri.

Vom examina acum funcția ei inversă, $z = F(u)$, definită prin

$$u = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}}, \tag{16}$$

și vom arăta că $F(u)$ este funcție *uniformă și meromorfă în tot planul* (u).

Din (16) se deduce îndată, ținînd seama de faptul că

$$\frac{dF}{du} = \frac{dz}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dz}},$$

următoarea ecuație diferențială la care satisface $z = F(u)$,

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = P(z). \tag{17}$$

Această ecuație are o infinitate de soluții (integrale particulare). Forma ei arată că, $z = F(u)$ fiind una din ele, toate celelalte soluții sînt

$$z = F(\pm u + C), \tag{18}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Integrala generală (18) a lui (17) se obține, într-adevăr, prin inversiunea funcției u de z, dată de

$$u - u_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}}, \tag{19}$$

unde u_0 și z_0 sînt constante arbitrare, iar valoarea inițială a radicalului $\sqrt{P(z_0)}$ poate fi luată una oarecare din cele două determinări ale lui.

O integrală particulară oarecare a lui (17) este complet determinată prin valoarea u_0 pe care ea o ia în z_0 (cantitățile u_0 și z_0 fiind constante arbitrare, independente una de alta) și de determinarea aleasă pentru $\sqrt{P(z_0)}$.

După ipoteza făcută în § 2, avem $P(0) \neq 0$ și deci funcția $u = I(z)$, definită prin (16), este olomorfă în $z = 0$, oricare ar fi ramura ei considerată.

Să ne fixăm atenția în particular asupra ramurii care se anulează în $z = 0$ și să considerăm din $z = F(u)$ elementul corespunzător, adică acela care se anulează pentru $u = 0$.

După cele ce am văzut la începutul capitolului precedent, acest element este *ordinar*, deoarece derivata lui $I(z)$ în $z = 0$ este $\frac{1}{\sqrt{P(0)}} \neq 0$.

Pentru a arăta că $z = F(u)$ este uniformă și meromorfă în tot planul (u), vom urmări prelungirea analitică a acestui element ordinar.

9. Este clar că toate elementele obținute în această prelungire vor satisface ecuația diferențială (17) pe care o satisface elementul inițial, derivata unei funcții olomorfe fiind olomorfă în același domeniu, iar P fiind polinom în z.

Fie $u = \beta$ un punct singular întîlnit pe drumul de prelungire L, pe care am plecat din $u = 0$.

Vom arăta că, atunci cînd u tinde către β pe L *, $z = F(u)$ tinde neapărat către o valoare determinată, finită sau infinită.

Să presupunem, într-adevăr, că nu ar fi așa; există atunci un șir de puncte β_n pe L cu $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$, astfel încît $\alpha_n = F(\beta_n)$ tinde către o limită α și totodată un șir β'_n, tot cu $\lim_{n\to\infty} \beta'_n = \beta$, astfel încît $\alpha'_n = F(\beta'_n)$ tinde către $\alpha' \neq \alpha$.

Din α și α', unul este finit, fie α. Putem presupune $P(\alpha) \neq 0$, deoarece dacă există un α, există și o infinitate de α, imaginea drumului L prin $z = F(u)$

* Reamintim că aceasta înseamnă că valoarea parametrului t, de care depinde u (și care definește drumul L), tinde, crescînd, către valoarea sa în punctul β al drumului L.

fiind tot un drum continuu. Există o integrală particulară a lui (17) și numai una singură care în $u = \beta$ ia valoarea α. După (19), se vede că această integrală este olomorfă în $u = \beta$, deoarece $P(\alpha) \neq 0$.

Pe de altă parte, tot (19) arată că raza de convergență a elementului corespunzător depinde numai de z_0, și nu de u_0. Fie $\rho(z_0)$ această rază.

Cînd α_n tinde către α, cantitatea $\rho(\alpha_n)$ tinde către $\rho(\alpha)$. Ea este deci, pentru n destul de mare, superioară unui număr pozitiv h, deoarece $\rho(\alpha) > 0$. Dar, cum pe L avem $\lim \beta_n = \beta$, de la un n destul de mare înainte, cercul de convergență al elementului (β_n, α_n) al lui $z = F(u)$ va cuprinde atunci tot arcul $(\beta_n\beta)$ al lui L, și deci punctul β, contrar ipotezei.

Deci, cînd u tinde, pe L, către un u_0 oarecare finit, $z = F(u)$ *tinde către o limită determinată* z_0, *finită sau infinită.*

Să considerăm mai întîi cazul cînd z_0 este finit.

Dacă ne referim la (19), se vede că, dacă $P(z_0) \neq 0$, funcția are un punct ordinar în $u = u_0$.

Pe de altă parte, cu notațiile din § 3 vom avea, în cazul $P(z_0) = 0$, în vecinătatea lui $z = z_0$,

$$u - u_0 = \int_{z_0}^{z} [\beta_0 (\zeta - z_0)^{-\frac{1}{2}} + \beta_1 (\zeta - z_0)^{\frac{1}{2}} + \beta_2 (\zeta - z_0)^{\frac{3}{2}} + \ldots] d\zeta,$$

ceea ce dă

$$u - u_0 = 2\beta_0 (z - z_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\beta_1}{3} (z - z_0)^{\frac{3}{2}} + \ldots .$$

Cum $\beta_0 \neq 0$, aceasta duce, conform capitolului precedent, la un element invers ordinar.

Așadar, oricare ar fi z_0 finit, $z = F(u)$ este ordinar în $u = u_0$.

Rămîne de examinat cazul cînd $z_0 = \infty$.

Schimbarea de variabilă $\zeta = \frac{1}{\zeta'}$ arată că avem atunci pentru $z = F(u)$ un pol ordinar în $u = u_0$, și anume un pol simplu.

Prin urmare, funcția $z = F(u)$, inversa funcției $u = I(z)$, nu are, în tot planul (u), la distanță finită, alte singularități decît poli.

Ea este deci uniformă și meromorfă în tot planul finit.

10. Funcția $F(u)$ este dublu periodică. Din prima formulă (15) se vede că în toate punctele

$$u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

unde m_1 și m_2 sînt întregi arbitrari, funcția $z = F(u)$ ia aceeași valoare ca în u.

Cum $F(u)$ este meromorfă în tot planul, vom fi arătat că ea este dublu periodică cu perioadele ω_1 și ω_2 în sensul celor spuse în capitolul VII dacă vom arăta că raportul $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este nereal.

După relațiile (12) putem exprima pe ω_1 și ω_2 cu ajutorul unor integrale luate pe contururi elementare.

Avem, cu notațiile din § 4,

$$\omega_1 = A_1 - A_4 = \int_{\lambda_1} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}} - \int_{\lambda_4} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}}$$

și, dacă observăm că după parcurgerea lui λ_1 revenim în origine cu valoarea opusă celei inițiale pentru radical, putem scrie

$$\omega_1 = A_1 - A_4 = \int_{\lambda_{1,4}} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}},$$

desemnînd prin $\lambda_{1,4}$ conturul format din λ_1 și λ_4 parcurse succesiv, cu continuitate în $z = 0$ pentru funcția de sub semnul integral (fig. 38).

Avem expresia analogă pentru ω_2.

Prin deformare continuă a contururilor $\lambda_{1,4}$ și $\lambda_{2,4}$ și făcînd să tindă către centrele lor porțiunile circulare ale acestor contururi, obținem

$$\omega_1 = 2\int_{\overrightarrow{a_4 a_1}} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}}, \quad \omega_2 = 2\int_{\overrightarrow{a_4 a_2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{P(\zeta)}}. \qquad (20)$$

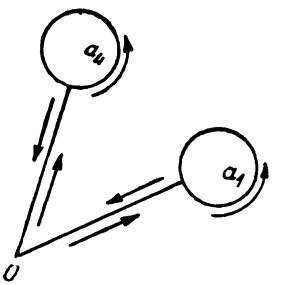


Fig. 38

11. Pentru a arăta că $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nu este un număr real, să facem în integralele (20) schimbarea liniară de variabilă

$$\zeta = \frac{\alpha\zeta' + \beta}{\gamma\zeta' + \delta},$$

unde α, β, γ și δ au fost alese astfel ca trei din punctele $\zeta = a_k$, fie a_1, a_4, a_2, să se transforme în trei puncte date de pe axa reală, fie 1, 2, 3, respectiv. Al patrulea punct, a_3, va cădea atunci într-un punct a din planul (ζ')

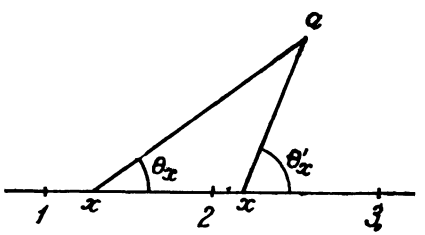


Fig. 39

Vom avea atunci de examinat raportul celor două cantități complexe

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}} \quad \text{și} \quad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}}, \qquad (21)$$

unde integralele sînt luate pe segmentele axei reale, indicate prin extremitățile lor, și unde

$$Q(x) = (1-x)(2-x)(3-x)(a-x). \qquad (22)$$

Pentru a fixa ideile, să presupunem că a se află în semiplanul superior.

Fie $\theta_x = \arg(a - x)$ cînd x este pe segmentul (1, 2) și $\theta'_x = \arg(a - x)$ cînd x este pe segmentul (2, 3) (fig. 39). Atît θ_x cît și θ'_x sînt cuprinși, în sens strict, între 0 și π.

Din (22) se vede că avem

$$\arg\left(\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}\right) = -\left(\frac{\theta_x}{2} + \frac{\pi}{2}\right), \text{ pentru } 1 < x < 2$$

și

$$\arg\left(\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}\right) = -\left(\frac{\theta_x}{2} + \pi\right), \text{ pentru } 2 < x < 3$$

și deci

$$\arg\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}} = -\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ și } \arg\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}} = -\left(\frac{\theta'}{2} + \pi\right),$$

unde θ și θ' sînt respectiv valori medii convenabile ale lui θ_x și θ'_x.

Raportul celor două cantități (21) are deci ca argument

$$\frac{\theta' - \theta}{2} + \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

Dar a fiind în semiplanul superior, avem

$$\left|\frac{\theta' - \theta}{2}\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Valoarea (23) este deci cuprinsă, în sens strict, între 0 și π, ceea ce arată că raportul cantităților (21) și deci $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nu poate fi real*.

Dacă a ar fi situat în semiplanul inferior, se aplică același raționament.

Dacă însă a este real (adică cele patru rădăcini a_k ale lui $P(\zeta)$ se găsesc pe un același cerc), putem alege întotdeauna pentru a_3 pe cea mai mare dintre rădăcinile lui $Q(x)$ și avem atunci $\theta'_x = \theta_x = 0$, oricare ar fi $x < a_3$, astfel încît (23) devine $\frac{\pi}{2}$.

Așadar, în orice caz, raportul $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ este nereal, iar funcția $z = F(u)$ este funcție dublu periodică.

Rezultă de aici că toate integralele ecuației diferențiale (17) sînt dublu periodice **.

O b s e r v a ț i e. Ideea inversiunii integralei eliptice de prima speță aparține lui J a c o b i. În modul acesta el a descoperit și studiat cele dintîi funcții meromorfe dublu periodice. De aici, pentru funcțiile dublu periodice și numele de funcții *eliptice*.

---

* În cele de mai sus, diversele argumente considerate au fost luate $\geqslant 0$ și $< 2\pi$. Este clar că adăugarea unui multiplu par de π de aceste argumente ar duce la adăugarea unui multiplu de π la (23), astfel încît rezultatul final ar rămîne același.

** Formulele **(15) mai arată că**, în orice paralelogram de perioade (ω_1, ω_2), $F(u)$ ia de *două* ori fiecare valoare. Funcția dublu periodică obținută prin inversiunea integralei (3) este deci de grad 2.

12. Aplicație la definirea funcției eliptice $\mathfrak{p}(u)$ a lui Weierstrass, cu ajutorul invarianților g_2 și g_3. Sîntem acum în măsură să răspundem la o chestiune lăsată deschisă în capitolul VII.

Am văzut că oricare ar fi cantitățile ω_1 și ω_2, cu singura condiție ca $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ să nu fie real, există o funcție $\mathfrak{p}(u)$ bine determinată, definită prin

$$\mathfrak{p}(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ = -\infty}}^{+\infty} \left[\frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} \right].$$

Ea satisface ecuația diferențială

$$\left(\frac{d\,\mathfrak{p}(u)}{du}\right)^2 = 4\,\mathfrak{p}^3(u) - g_2\,\mathfrak{p}(u) - g_3, \tag{24}$$

unde

$$g_2 = 60 \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ = -\infty}}^{+\infty} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

$$g_3 = 140 \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ = -\infty}}^{+\infty} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}.$$

Cantitățile g_2 și g_3 sînt *invarianții* funcției $\mathfrak{p}(u)$. Se pune întrebarea: în ce măsură pot fi dați *a priori* g_2 și g_3 pentru ca să existe o funcție $\mathfrak{p}(u)$ cu acești invarianți, adică în ce măsură relațiile de mai sus pot fi inversate, ducînd de la g_2 și g_3 la ω_1 și ω_2?

Dacă punem $z = \mathfrak{p}(u)$, ecuația diferențială (24) dă imediat

$$u - u_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}, \tag{25}$$

$z = \mathfrak{p}(u)$ fiind funcția inversă a acestei integrale, pentru u_0 și z_0 convenabil alese.

Integrala din membrul al doilea este o integrală eliptică de speța I, ca și (19), una din rădăcinile polinomului de sub radical fiind aici la ∞*.

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$z = \alpha + \frac{1}{z'},$$

* Se constată, într-adevăr, imediat că u are un punct critic algebric în $z = \infty$ făcînd obișnuita schimbare de variabilă $z = \frac{1}{z'}$.

unde α este ales astfel ca $4\alpha^3 - g_2\alpha - g_3 \neq 0$, (25) se transformă în

$$u - u_0 = \int_{z_0}^{z'} \frac{d\zeta'}{\sqrt{P(\zeta')}},$$

unde $P(\zeta')$ este un polinom de gradul 4 care are numai rădăcini distincte dacă acesta este cazul pentru polinomul de gradul 3 din (25), adică dacă $g_2^3 - 27\, g_3^2 \neq 0$.

Sîntem deci aduși la cazul studiat mai sus.

Prin urmare, oricare ar fi cantitățile complexe g_2 și g_3 satisfăcînd inegalitatea precedentă, există o funcție meromorfă dublu periodică $z = F(u)$ luînd în $u = u_0$ valoarea z_0, funcție obținută prin inversarea lui (25) și deci satisfăcînd ecuația diferențială (24).

O bază a sistemului ei de perioade este dată de

$$\omega_1 = 2\int_{a_3 a_1} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}, \quad \omega_2 = 2\int_{a_3 a_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}, \tag{26}$$

unde a_1, a_2, a_3 sînt, de exemplu, cele trei rădăcini finite ale polinomului de sub radical.

În particular, funcția $z = F(u)$ obținută prin inversarea lui

$$u = \int_{\infty}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}}, \tag{27}$$

este funcția $\mathfrak{p}(u)$ formată cu ω_1, ω_2 *.

Fie atunci g_2' și g_3' invarianții acestui $\mathfrak{p}(u)$.

Avem

$$\left(\frac{d\mathfrak{p}(u)}{du}\right)^2 = 4\mathfrak{p}^3(u) - g_2'\mathfrak{p}(u) - g_3'.$$

Orice inversă a lui (25) fiind o integrală a ecuației (24), avem totodată

$$\left(\frac{d\mathfrak{p}(u)}{du}\right)^2 = 4\mathfrak{p}^3(u) - g_2\mathfrak{p}(u) - g_3.$$

Scăzînd aceste două relații, obținem

$$(g_2 - g_2')\,\mathfrak{p}(u) = g_3' - g_3,$$

pentru orice u, deci pentru orice valoare $\mathfrak{p}(u)$.

De aici rezultă $g_2' = g_2$ și $g_3' = g_3$.

Prin urmare, oricare ar fi g_2 și g_3, cu condiția $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, *există o funcție* $\mathfrak{p}(u)$ *și numai una singură care are ca invarianți aceștia* g_2 *și* g_3.

Perioadele ω_1 și ω_2 ale acestei funcții sînt date prin formulele (26).

---

* Cititorul va arăta singur acest fapt făcînd, în (27), $z = \frac{1}{v}$ și dezvoltînd pe $\frac{1}{v(u)}$ în jurul lui $u = 0$, pentru a identifica funcția $\mathfrak{p}(u)$.

II. FUNCȚII POLIGONALE

13. În capitolele precedente am întîlnit diverse moduri de clasificare a funcțiilor analitice.

Din teorema generală de reprezentare conformă a lui Riemann se poate deduce o astfel de clasificare bazată pe considerații geometrice, luînd ca punct de plecare forma domeniului pe care funcția îl reprezintă conform pe un cerc sau pe semiplan.

Vom da aici cîteva aplicații ale acestei idei care ne vor duce, după cum vom vedea, în mod natural și pe o cale nouă, la unele clase de funcții deja întîlnite precum și la altele noi, de o deosebită importanță.

14. Funcțiile care reprezintă semiplanul superior ($y > 0$) pe un poligon. Să considerăm un poligon oarecare $(ABC...)$, în planul variabilei complexe (Z), cu unghiurile $\alpha\pi$, $\beta\pi$, ... unde α, β, ... sînt cuprinse între 0 și 1 (fig. 40).

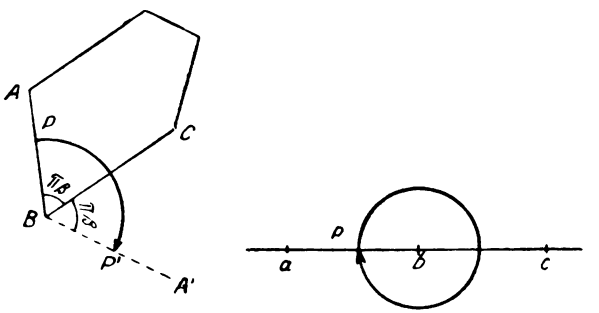


Fig. 40

Fie $z = F(Z)$ funcția care face reprezentarea conformă a acestui poligon pe semiplanul superior $y > 0$ al variabilei $z = x + iy$. Această reprezentare este posibilă, după teorema fundamentală din capitolul V.

Fie a, b, c, ... punctele de pe axa reală a lui (z), care corespund astfel respectiv cu vîrfurile A, B, C... Punctul de la ∞ este presupus aici reprezentant al unui punct oarecare diferit de vîrfurile poligonului.

Să notăm prin $Z = f(z)$ funcția inversă a lui $z = F(Z)$, care face deci reprezentarea conformă a semiplanului $y > 0$ din (z) pe poligonul din (Z).

Am văzut în capitolul IX, § 16, că $f(z)$ este continuă și univalentă și pe frontieră, adică aici pe axa reală.

Vom studia natura acestei funcții $f(z)$.

Fie z_1 un punct din $y > 0$ și Z_1 corespondentul său în poligon.

După principiul simetriei al lui Schwarz, stabilit în capitolul IV, § 14, prelungirea lui $f(z)$ se face dincolo de axa reală prin bc, iar imaginea semiplanului inferior $y < 0$ dată de această prelungire va fi simetricul poligonului față de BC. Cînd vom descrie un circuit închis, în jurul lui $z = b$ de exemplu, plecînd de la un punct p de pe ba, a cărui imagine pe BA este punctul P, vom ajunge înapoi în p cu imaginea P', simetricul lui P față de BC. Funcția $f(z) - B$, care se anulează în $z = b$, este olomorfă într-un cerc γ cu centrul în $z = b$, cu excepția centrului, unde are un punct critic.

Într-adevăr, cînd descriem circuitul închis de mai sus, ea revine în fiecare punct din γ cu valoarea inițială în acel punct înmulțită cu $e^{\pm 2\pi i\beta}$, unde $\pi\beta$ este unghiul ABC.

Prin urmare, funcția

$$[f(z) - B]^{\frac{1}{\beta}}$$

revine cu aceeași valoare cu care am pornit și este deci olomorfă și uniformă în tot γ, inclusiv centrul $z = b$, unde are un zero, și anume un zero simplu, pentru că argumentul crește cu $\pm 2\pi$ cînd descriem circuitul.

Avem deci,

$$[f(z) - B]^{\frac{1}{\beta}} = (z - b)\,[\mu_1 + \mu_2 (z - b) + \ldots],$$

cu $\mu_1 \neq 0$.

Deci,

$$f(z) = B + (z - b)^{\beta}\ \ [\mu_1 + \mu_2 (z - b) + \ldots]^{\beta}$$

și cum $\mu_1 \neq 0$, oricare ar fi unghiul $\pi\beta$, funcția

$$[\mu_1 + \mu_2 (z - b) + \ldots]^{\beta}$$

are în $z = b$ un punct ordinar.

Avem deci, într-un cerc suficient de mic în jurul lui $z = b$,

$$f(z) = B + (z - b)^{\beta}\ H(z - b), \tag{28}$$

$H(z - b)$ fiind olomorfă în $z = b$ cu $H(0) \neq 0$.

Derivînd, obținem

$$f'(z) = (z - b)^{\beta - 1}\ H_1(z - b). \tag{29}$$

Cum $\beta \neq 0$, $H_1(z - b)$ este altă funcție olomorfă în b, cu $H_1(0) \neq 0$. Derivînd încă o dată, obținem ($\beta \neq 1$)

$$f''(z) = (\beta - 1)\,(z - b)^{\beta - 2}\ \ H_2(z - b), \tag{30}$$

cu $H_2(z - b)$ olomorfă în b, cu $H_2(0) = H_1(0)$. Deci din (30) și (29) se deduce

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\beta - 1}{z - b} + H_3(z - b), \tag{31}$$

$H_3(z - b)$ fiind iarăși olomorfă în b, pentru că $H_1(z - b) \neq 0$ în $z = b$ și pentru că $H_1(0) = H_2(0)$.

În (31) nu mai figurează exponenți neîntregi. Egalitatea (31) este valabilă pentru orice ramură a funcției $f(z)$ în prelungirea ei în jurul lui $z = b$. Pe de altă parte, o egalitate analogă se va putea scrie în jurul oricăruia din punctele a, c, ...

Prin urmare, funcția din primul membru al lui (31) este uniformă în tot planul (z) și nu are decît poli simpli în punctele $a, b, c, \ldots$ corespunzătoare vîrfurilor $A, B, C, \ldots$

Vom arăta că și $z = \infty$ este punct ordinar pentru $\frac{f''(z)}{f'(z)}$.

Am presupus că $z = \infty$ corespunde unui punct de pe interiorul unei laturi. Avem deci, făcînd $z = \frac{1}{z'}$,

$$f\left(\frac{1}{z'}\right) = c_0 + c_1 z' + c_2 z'^2 + \ldots,$$

în $|z'| < \rho'$, cu ρ' suficient de mic.

Deci,

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots,$$

în $|z| > \rho$ cu $\rho = \frac{1}{\rho'}$ suficient de mare și deci, după cum se calculează cu ușurință,

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z} + \frac{c}{z^2} + \ldots, \tag{32}$$

în $|z| > \rho$, ceea ce arată că funcția $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ este olomorfă în $|z| > \rho$.

Deci, funcția aceasta nu are în tot planul decît poli simpli iar la infinit un punct ordinar, și anume un zero, după cum se vede din (32).

Reziduurile polilor simpli se văd din (31).

Funcția $\frac{f''(z)}{f'(z)}$, neavînd alte singularități decît poli (atît la distanță finită cît și la ∞), este rațională.

Cum părțile principale ale polilor sînt cele din (31) și cum funcția este zero la infinit, avem, așadar,

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_b \frac{\beta - 1}{z - b}, \tag{33}$$

unde Σ se întinde la toate punctele $a, b, c, \ldots$ corespunzătoare, pe axa reală, vîrfurilor poligonului.

Din (33), se deduce prin integrare

$$\log f'(z) = \sum_b (\beta - 1) \log (z - b) + \text{const.},$$

adică

$$f'(z) = k_1 \prod (z - b)^{\beta - 1}$$

și, prin încă o integrare,

$$f(z) = k_2 + k_1 \int_{z_0}^{z} \prod_{b} (u - b)^{\beta - 1}\, du, \ * \tag{34}$$

unde k_1 și k_2 sînt constante și z_0 un punct fix din (z).

Funcția căutată $Z = f(z)$ va fi deci de forma (34). Pentru a o determina complet, trebuie determinate punctele $a, b, c, \ldots$ și cele două constante. Trei din punctele $a, b, c, \ldots$ de pe axa reală a lui (z) sînt arbitrare (din cauză că reprezentarea depinde de trei parametri reali). Celelalte trebuie determinate în fiecare caz.

15. Funcția $f(z)$ este întotdeauna multiformă.

Inversa ei $z = F(Z)$ poate fi însă uniformă.

Vom arăta anume că:

Pentru ca funcția $z = F(Z)$ care face reprezentarea poligonului pe semiplanul superior să fie uniformă în tot planul (Z), trebuie ca poligonul să nu aibă mai mult de patru laturi.

Să facem prelungirea funcției $F(Z)$ în planul (Z), aplicînd mereu principiul simetriei. Simetricele succesive ale poligonului vor forma suprafața lui Riemann a acestei funcții acoperind planul (Z), punctele critice ale funcției neputînd fi decît vîrfurile poligonului și simetricele lor succesive.

Pentru ca aceste vîrfuri să nu fie puncte critice trebuie ca, după un număr de simetrii în jurul unui asemenea vîrf, să revenim la poligonul de la care am plecat, fără a-l acoperi. Trebuie deci ca unghiul $\pi\beta$ să fie un submultiplu al lui 2π. Dar mai este necesar și ca numărul acestor operații să fie *par*, pentru că imaginea poligonului prin $z = F(Z)$ este, alternativ, semiplanul superior și cel inferior. Deci, trebuie ca $\pi\beta$ să fie submultiplu al lui π, adică β (și cantitățile analoge relative la celelalte vîrfuri) să fie de forma $\frac{1}{m}$ cu m întreg și $\geqslant 2$.

Fie n numărul vîrfurilor, și deci al laturilor.

Avem

$$\pi \sum \beta = (n - 2)\,\pi$$

deci, punînd $\beta = \frac{1}{m}$,

(8)
$$\sum \frac{1}{m} = n - 2. \tag{35}$$

Dar $m \geqslant 2$, deci

$$\sum \frac{1}{m} \leqslant \frac{n}{2}.$$

De aici, înlocuind în (35), obținem

$$\frac{n}{2} \geqslant n - 2,$$

adică
$$n \leqslant 4,$$

ceea ce era de demonstrat.

---

* Această formulă se numeste formula Schwarz-Cristoffel.

16. Să considerăm acum și cazul cînd $z = \infty$ ar fi reprezentantul unui vîrf al poligonului prin $z = F(Z)$.

Fie A acel vîrf și $n\alpha$ unghiul din A.

După un circuit descris în jurul lui $z = \infty$ (adică un cerc cu centrul în $z = 0$ și raza destul de mare pentru ca în afara lui să nu mai fie nici unul din punctele $b, c, \ldots$ corespunzătoare celorlalte vîrfuri), funcția $f(z) - A$ se înmulțește cu $\pm 2\pi i\alpha$ și deci $[f(z) - A]^{\frac{1}{\alpha}}$ este uniformă în jurul lui $z = \infty$. Deoarece această funcție se anulează la infinit și are acolo un zero simplu, avem dezvoltarea

$$[f(z) - A]^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\mu_1}{z} + \frac{\mu_2}{z^2} + \ldots,$$

cu $\mu_1 \neq 0$, dezvoltare valabilă pentru $|z| > \rho$.

Prin calcul, obținem în același domeniu

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{z^2} + \ldots .$$

Deci punctul $z = \infty$ este, pentru $\frac{f''(z)}{f'(z)}$, tot un punct ordinar, și anume un zero. Vom avea deci și aici

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \Sigma \frac{\beta - 1}{z - b},$$

suma fiind extinsă numai la punctele $b, c, \ldots$, așezate la distanță finită.

Deci, în cazul cînd $z = \infty$ se transformă într-un vîrf, formula (34) rămîne valabilă, în produsul de sub integrală figurînd însă numai punctele $a, b, c, \ldots$ care sînt la distanță finită.

17. Cazurile cînd funcția $z = F(Z)$ este uniformă. Am văzut că aceasta se întîmplă numai pentru cazul triunghiului și al patrulaterului, trebuind însă ca fiecare unghi să fie un submultiplu al lui π.

Să luăm întîi cazul triunghiului.

Fie $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$ unghiurile.

Pentru ca funcția să fie uniformă, am văzut că trebuie ca

$$\alpha = \frac{1}{m}, \quad \beta = \frac{1}{n}, \quad \gamma = \frac{1}{p},$$

cu m, n și p întregi $\geqslant 2$.

Cum, pe de altă parte, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, acești întregi pozitivi trebuie să satisfacă relația

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1.$$

Această ecuație admite numai patru sisteme de soluții în numere întregi $\geqslant 2$, și anume :

(*a*)	$m = n = 2,\ p = \infty,$	bandă cuprinsă între paralele;*
(*b*)	$m = 2,\ n = p = 4,$	triunghi dreptunghic isoscel;
(*c*)	$m = 2,\ n = 3,\ p = 6,$	triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° și unul de 60°;
(*d*)	$m = n = p = 3,$	triunghi echilateral.

În cazul (*a*), triunghiul degenerează într-o bandă cuprinsă între două paralele. Atunci avem, după (34),

$$Z = f(z) = k_2 + k_1 \int_{z_0}^{z} \frac{du}{\sqrt{(u-a)(u-b)}},$$

care se reduce la funcții elementare ce se exprimă prin arc-sinus.

Funcția uniformă $z = F(Z)$ este deci simplu periodică.

În cazurile (*b*), (*c*) și (*d*), avem respectiv

$$Z = k_2 + k_1 \int_{z_0}^{z} \frac{du}{\sqrt[4]{(u-a)^2 (u-b)^3 (u-c)^3}},$$

$$Z = k_2 + k_1 \int_{z_0}^{z} \frac{du}{\sqrt[6]{(u-a)^3 (u-b)^4 (u-c)^5}},$$

$$Z = k_2 + k_1 \int_{z_0}^{z} \frac{du}{\sqrt[3]{(u-a)^2 (u-b)^2 (u-c)^2}}.$$

Funcțiile $z = F(Z)$ corespunzătoare sînt (după cum se constată construind simetricele succesive ale triunghiurilor) funcții eliptice cu perioade făcînd un unghi drept în cazul (*b*) și cu perioade făcînd un unghi de 60° în cazurile (*c*) și (*d*). Cantitățile reale *a*, *b*, *c* sînt aici trei cantități oarecare.

Să considerăm acum cazul patrulaterului.

Aici, numai trei din cele patru cantități reale *a*, *b*, *c* și *d* corespunzătoare celor patru vîrfuri *A*, *B*, *C* și *D* sînt arbitrare, cea de-a patra fiind determinată prin primele trei, o dată ce patrulaterul este dat.

---

* Formula (34) rămîne valabilă și în cazul $\beta = 1$, modificînd convenabil demonstrația.

Avem aici, dacă unghiurile $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$, $\pi\delta$ satisfac condiția de a fi submultiplii ai lui π,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2.$$

Cum m, n, p și q sînt $\geqslant 2$ și întregi, nu avem decît un singur sistem soluție, și anume

$$m = n = p = q = 2, \text{ adică dreptunghiul.}$$

Deci, funcția $Z = f(z)$ va fi de forma

$$Z = k_2 + k_1 \int_{z_0}^{z} \frac{du}{\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}}. \tag{36}$$

Aceasta este o integrală eliptică de prima speță de felul celor cercetate în secțiunea precedentă.

18. Să observăm că rădăcinile a, b, c, d ale polinomului de sub radical sînt aici toate reale. Din ele, dacă dreptunghiul $ABCD$ este dat, trei pot fi alese arbitrar pe dreapta reală a planului (z), a patra fiind atunci determinată.

Poziția dreptunghiului în planul (Z), o dată raportul laturilor sale dat, nu modifică decît constantele k_1 și k_2 în (36). Făcînd să varieze acest raport, dispunem încă de un parametru real, care permite alegerea și celui de-al patrulea punct pe axa reală a planului (z). Cele patru puncte trebuie însă să fie distincte între ele și așezate în ordinea corespunzătoare vîrfurilor dreptunghiului.

Am văzut, în secțiunea precedentă, că funcția $z = F(Z)$ este o funcție eliptică. Perioadele ei fundamentale formează aici un unghi drept. În cazul de față, faptul acesta rezultă de altfel și direct din considerațiile ce precedă, pentru că $z = F(Z)$ este uniformă și meromorfă și pentru că simetricele succesive ale dreptunghiului față de laturile sale sînt reprezentate, alternativ, pe semiplanul superior și inferior din (z) *.

19. Funcția modulară. Am studiat pînă aici funcțiile de reprezentare conformă ale semiplanului pe un poligon rectiliniu. Reprezentarea pe poligoane formate din arce de cerc (eventual segmente de dreaptă) duce la o clasă importantă de funcții, numite «automorfe», din care vom studia aici numai *funcția modulară*, cea mai importantă dintre ele.

Funcția modulară se obține făcînd reprezentarea conformă pe semiplanul superior (z) a unui triunghi OAB din planul (Z), triunghi format din semicercul cu diametrul OA ($OA = 1$) și cele două laturi paralele OB și AB. Cele trei

* Cititorul va demonstra ușor că, oricare ar fi cantitățile reale a, b, c, d, integrala (36) reprezintă conform semiplanul superior din (z) pe un dreptunghi din (Z).

vîrfuri ale triunghiului sînt deci $Z = 0, Z = 1$ și $Z = \infty$. Triunghiul este reprezentat haşurat în figura 41 *.

Putem face reprezentarea acestui triunghi pe semiplanul superior (z), astfel ca punctele $0, 1, \infty$ din (z) să fie, respectiv, imaginile vîrfurilor O, $A = 1$ și $B = \infty$.

Fie, ca și în cazurile examinate anterior, $Z = f(z)$ funcția ce reprezintă semiplanul (z) (fig. 42) pe triunghiul OAB din (Z) și fie z_0 un punct care se transformă în punctul Z_0 din (Z). Prin $Z = f(z)$, segmentului $(0, 1)$ îi corespunde semicercul OA, segmentului $(1, \infty)$, semidreapta AB, iar segmentului $(\infty, 0)$, semidreapta BO.

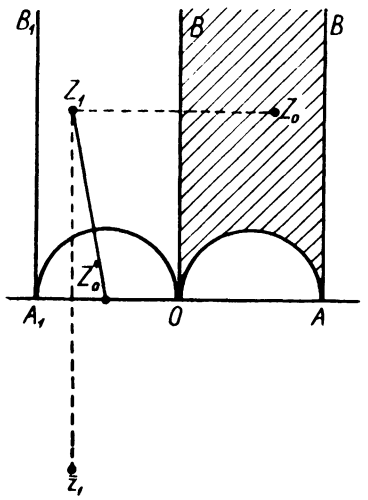


Fig. 41

Deci, după principiul simetriei, putem face prelungirea elementului cu centrul în z_0 în

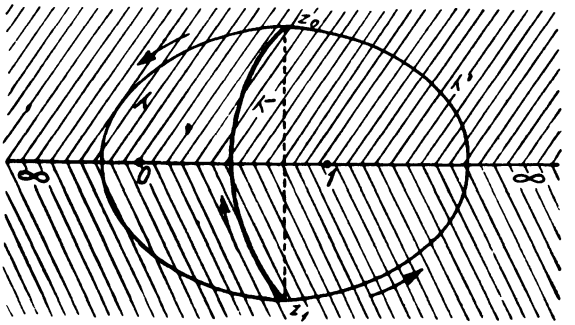


Fig. 42

lungul drumului λ străbătînd segmentul $(\infty, 0)$ și obținem, în puncte simetrice față de axa reală din (z), puncte simetrice față de OB. În z_1 (fig. 42) simetricul lui z_0, vom ajunge deci cu valoarea Z_1, simetrică față de OB a lui Z_0. Astfel, prelungirea tuturor elementelor din semiplanul superior prin segmentul $(\infty, 0)$ va duce la prelungirea funcției $f(z)$ în semiplanul inferior (z) și această prelungire va reprezenta tot planul (z) pe cele două triunghiuri din figura 41, haşurat și nehaşurat, simetrice față de axa OB.

Să prelungim mai departe elementul obținut astfel în z_1 al funcției $f(z)$, dar de data aceasta prin segmentul $(1, \infty)$, în lungul drumului λ' (fig. 42) pînă în z_0. Lucrul acesta este și el posibil, tot conform principiului simetriei, și vom obține acum, în semiplanul superior (z), valori simetrice față de A_1B_1. Aceasta înseamnă că prelungirea elementului *inițial* din z_0, în lungul drumului închis $\lambda + \lambda'$, în sensul indicat pe figura 42, duce de la valoarea inițială Z_0 la valoarea $Z_0' = Z_0 - 2$, care este simetrica lui Z_1 față de A_1B_1.

* Printr-o transformare liniară care reprezintă semiplanul $Y > 0$ pe un cerc Γ, triunghiul poate fi transformat într-un triunghi oarecare avînd cele trei vîrfuri ale sale pe Γ, iar ca laturi arce de cerc ortogonale lui Γ. Toate unghiurile unui asemenea triunghi sînt evident nule.

Prin urmare, circulația în jurul punctului ∞ din (z), pe drumul închis $\lambda + \lambda'$, are ca efect substituția

$$Z' = Z - 2, \tag{37}$$

pentru toate valorile inițiale Z luate de $f(z)$.

20. Să vedem acum ce efect produce circulația în jurul punctului $z = 0$. Pentru aceasta, ne vom înapoia în z_0 din z_1, pe drumul λ'' care străbate segmentul (0, 1) corespunzător acum semicercului OA_1 din figura 41.

Tot conform principiului lui Schwarz, la puncte simetrice față de axa reală din (z) vor corespunde puncte simetrice față de semicercul OA_1 din (Z). Vom ajunge deci înapoi în z_0, după prelungirea elementului inițial pe drumul $\lambda + \lambda''$, cu valoarea Z_0'' simetrică față de semicercul OA_1 a valorii Z_1.

Să evaluăm acum Z_0'' în funcție de Z_0.

Pentru aceasta, să ne amintim că simetricul față de un cerc este inversul geometric față de acel cerc și că, pe de altă parte, transformarea

$$\zeta' = \frac{r^2}{\zeta}$$

revine la inversiunea geometrică față de cercul $|\zeta| = r^2$, urmată de o simetrie față de axa reală din (ζ).

Aici, Z_0'' este inversul geometric al lui Z_1 față de cercul cu centrul în $-\frac{1}{2}$ și cu raza $\frac{1}{2}$.

Dacă mutăm originea în $-\frac{1}{2}$ (păstrînd direcția axelor), vom avea, însemnînd cu ζ_0'' și ζ_1 noile afixe,

$$\zeta_0'' = \frac{\frac{1}{4}}{\bar{\zeta}_1},$$

$\bar{\zeta}_1$ fiind, ca de obicei, conjugatul lui ζ, adică simetricul său față de axa reală.

Revenind la originea în O, vom avea deci

$$Z_0'' + \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{4}}{\bar{Z}_1 + \frac{1}{2}},$$

și cum $\bar{Z}_1 = -Z_0$ (după cum se vede îndată din figura 41), avem

$$Z_0'' + \frac{1}{2} = \frac{-\frac{1}{4}}{Z_0 - \frac{1}{2}},$$

adică

$$Z_0'' = \frac{-Z_0}{2Z_0 - 1}.$$

Prin urmare, circulația în jurul punctului $z = 0$ pe drumul $\lambda + \lambda''$ are ca efect substituția

$$Z'' = \frac{-Z}{2Z - 1}. \tag{38}$$

Cum circulația în jurul punctului $z = 1$ se obține prin suprapunerea circulației în jurul celorlalte două puncte ($z = 0$ și $z = \infty$), se vede că funcția $Z = f(z)$ este multiformă și că valorile ei în același punct se obțin prin transformările grupului (M) de transformări liniare generat de (37) și (38).

Grupul (M) se numește *grupul modular*. El este caracterizat prin următoarele proprietăți:

1) Grupul este format din transformări de forma

$$Z' = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

cu α, β, γ și δ întregi și astfel ca

$$\alpha\delta - \gamma\beta = 1.$$

2) α și δ sînt impari; β și γ pari.

Se verifică îndată că substituțiile găsite (37) și (38) satisfac aceste condiții și că grupul (M), generat de ele, nu conține decît transformări satisfăcînd aceleași condiții.

Se demonstrează de asemenea că orice substituție care satisface aceste două condiții este produsul unui număr finit de substituții (37) și (38)*.

În afară de 0, 1, ∞, puncte critice în jurul cărora se permută o infinitate de determinări, funcția $Z = f(z)$ nu are decît puncte ordinare.

Suprafața ei riemanniană are o infinitate de foi care acoperă tot (z) și care se unesc în 0,1 și ∞.

21. Funcția $Z = f(z)$ este deci multiformă, avînd ca puncte singulare (critice) punctele $z = 0$, $z = 1$ și $z = \infty$. Funcția inversă $z = F(Z)$, dimpotrivă, *este uniformă, domeniul ei de existență fiind semiplanul* $Y > 0$.

Din repetarea la infinit a procesului de simetrie în planul (Z) se obțin, într-adevăr, pe de o parte benzi paralele întinzîndu-se peste tot semiplanul și formînd cîte două, în dreapta și în stînga domeniului haşurat, domenii identice; iar, pe de altă parte, domenii limitate fiecare de cîte trei arce de cerc și cuprinse în interiorul semicercului OA și al semicercurilor identice din dreapta și din

* A se vedea de exemplu G. Julia, *Principes géométriques d'Analyse*, Paris 1932, t. II

stînga lui, domenii îngrămădindu-se către puncte de pe axa reală, după cum se vede în figura 43.

În această figură, domeniile haşurate de două ori corespund semiplanului inferior, cele haşurate o dată, semiplanului superior.

Toate semicercurile sînt ortogonale la axa reală, căci simetria revine întodeauna la o inversiune geometrică, avînd centrul pe această axă.

Din cauză că aceste domenii nu se acoperă unele pe altele, funcția $z = F(Z)$ este uniformă.

Funcția are ca domeniu de existență tot semiplanul superior (Z), pentru că procesul de mai sus duce la acoperirea totală a acestui semiplan, fără a ieşi din el. Axa reală este formată *numai din puncte singulare.*

Funcția aceasta se numeşte *funcția modulară.*

O vom nota cu $\mu(Z)$, iar funcția multiformă inversă cu $\lambda(z)$.

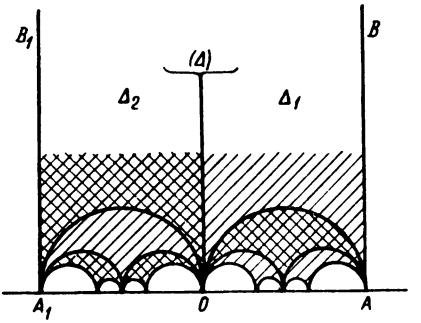


Fig. 43

22. Aplicație a funcției modulare. Teorema lui Picard. Cea mai celebră aplicație a funcției modulare este aceea pe care a făcut-o É. Picard în 1879 şi care l-a dus la teorema fundamentală, cunoscută sub numele de teorema lui Picard.

Această teoremă, care este originea întregii teorii moderne a repartiției valorilor funcțiilor analitice, cuprinde două părți. Prima parte (numită cîteodată şi teorema «cea mică» a lui Picard) priveşte funcțiile întregi. Cea de-a doua (teorema «cea mare» a lui Picard) constituie o generalizare a celei dintîi şi priveşte funcțiile uniforme în jurul unui punct singular esențial izolat. Ea este o adîncire a teoremei lui Weierstrass privitoare la aceste singularități.

Există mai multe demonstrații ale ambelor teoreme.

Vom da, deocamdată, ca aplicație imediată a funcției modulare, însăşi demonstrația dată de P i c a r d, extrem de simplă pentru cazul funcțiilor întregi.

Fie $G(z)$ o funcție întreagă oarecare.

Se ştie că, după teorema lui Weierstrass relativă la punctele singulare esențiale izolate (aici $z = \infty$), $G(z)$ se apropie oricît de mult de orice valoare finită dată cînd z tinde către ∞.

Pe de altă parte, exemplul funcției e^z arată că unele valori, cum este aici valoarea zero, *nu sînt luate* de funcție în nici un punct.

Vom arăta că:

Orice funcție întreagă $G(z)$ neconstantă ia orice valoare finită, în afară, cel mult, de o singură valoare excepțională.

Să presupunem că $G(z)$ ar avea două valori excepționale a și b, distincte, adică $a \neq b$, și ecuațiile

$$G(z) = a, \quad G(z) = b$$

nu ar avea, nici una nici alta, nici o soluție.

Printr-o transformare simplă

$$G_1(z) = \frac{G(z) - a}{b - a},$$

se vede că funcția intreagă $G_1(z)$ ar avea atunci valorile excepționale 0 și 1.

Să considerăm funcția $Z = \lambda(z)$, inversă a funcției modulare și, schimbînd notațiile, să o scriem $U = \lambda(u)$.

Să punem

$$u = G_1(z).$$

Vom obține o funcție

$$U = \lambda[G_1(z)], \tag{39}$$

care este uniformă în tot planul (z).

Într-adevăr, λ neavînd alte puncte singulare la distanță finită decît 0 și 1, iar $G_1(z)$ fiind întotdeauna diferit de 0 și 1, teorema monodromiei se aplică (pentru că planul este simplu conex) și arată că $\lambda[G_1(z)]$ este uniformă.

Dar, funcția este și olomorfă, pentru că $\lambda(u)$ este olomorfă în orice punct diferit de 0, 1 și ∞.

Funcția (39) este deci întreagă.

Ea nu poate lua însă decît valorile pe care le ia $U = \lambda(u)$.

Aceasta, fiind inversa funcției modulare, nu ia decît valori din semiplanul superior, adică valori unde coeficientul lui i este > 0. Or, aceasta contrazice teorema lui Weierstrass, deoarece atunci funcția întreagă (39) nu se poate apropia oricît vrem de o valoare dată cu un astfel de coeficient negativ, de exemplu de $-i$. Prin urmare, ipoteza existenței celor două valori excepționale finite a și b *distincte* duce la o contradicție, și teorema lui Picard este demonstrată pentru funcțiile întregi.

23. Observație. Propoziția se extinde îndată la funcțiile meromorfe (în tot planul finit) sub forma următoare : *o funcție meromorfă neconstantă ia orice valoare finită sau infinită, în afară, cel mult, de două valori excepționale.*

Într-adevăr, dacă ar exista trei astfel de valori pentru funcția meromorfă $f(z)$, fie a, b, c, funcția meromorfă

$$f_1(z) = \frac{f(z) - a}{f(z) - b} \cdot \frac{c - b}{c - a}$$

nu ar lua valorile 0, ∞ și 1. Ea ar fi deci funcție întreagă care ar avea valorile excepționale 0 și 1, deci o constantă, ceea ce ar implica $f(z) \equiv$ constant.

III. DIVERSE TEOREME ASUPRA FUNCȚIILOR UNIFORME CARE DECURG DIN EXISTENȚA FUNCȚIEI MODULARE

Funcția modulară $\mu(Z)$ și inversa ei $\lambda(z)$, care a servit la demonstrarea primei teoreme a lui Picard, s-au dovedit ulterior a fi la baza unui grup întreg de propoziții mai mult sau mai puțin înrudite cu această teoremă dar care, în mare parte, au fost găsite pe diverse căi.

Vom arăta, în cele ce urmează, cum unele din cele mai importante din aceste propoziții se pot stabili cu ajutorul funcției modulare*.

24. **Teorema lui Landau.** Fie $z = f(\zeta)$ o funcție olomorfă în $|\zeta| > R$ care, în acest cerc, nu ia două valori a și b distincte între ele. Schimbarea de funcție efectuată în secțiunea precedentă permite să luăm pentru a și b valorile 0 și 1.

Fie deci $z = f(\zeta)$ olomorfă în $|\zeta| < R$, unde ea nu ia nici valoarea 0, nici valoarea 1.

Funcția

$$Z = \lambda[f(\zeta)] \tag{40}$$

este uniformă și olomorfă în $|\zeta| < R$, pentru aceleași motive ca și în secțiunea precedentă, unde, în locul lui $f(\zeta)$, am substituit în $\lambda(z)$ o funcție întreagă.

În $|\zeta| < R$ avem

$$z = f(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots, \tag{41}$$

cu $c_0 \neq 0$ și $\neq 1$.

Pentru $\lambda(c_0)$ a trebuit aleasă în (40) o anumită determinare a lui $\lambda(z)$ în $z = c_0$ și deci, pentru $\lambda[f(\zeta)]$, o anumită ramură, de altfel oarecare, toate fiind uniforme și olomorfe în $|\zeta| < R$. Vom face, de exemplu, alegerea aceasta în domeniul infinit Δ din figura 43 a secțiunii precedente, ceea ce este posibil, după modul cum a fost construită funcția $Z = \lambda(z)$.

Pe acest Δ, format din două benzi infinite paralele, Δ_1 și Δ_2, ale planului (Z) (fig. 43), este reprezentat conform prin funcția

$$Z = \lambda(z)$$

întreg planul (z), *tăiat* după semidreapta $(0, 1, \infty)$. Din această semidreaptă, segmentul infinit $(1, \infty)$ este reprezentat pe AB și A_1B_1 (fig. 43, unde B și B_1 sînt ∞), iar segmentul $(0, 1)$ pe semicercurile de diametru OA și OA_1, situate în semiplanul $Y > 0$. Semiplanul (z) superior $(y > 0)$ este reprezentat conform pe Δ_1 (banda infinită din dreapta lui OY), iar semiplanul inferior $(y < 0)$ pe Δ_2 (banda infinită din stînga lui OY).

---

* Alte metode sînt expuse în vol. II, cap. V.

A se vedea și lucrările lui C. Constantinescu: *Cîteva aplicații ale principiului metricii hiperbolice*, «Studii și cercetări matematice», 1955, t. VI, nr. 3—4, p. 529—566 și *Einige Anwendungen des hyperbolischen Masses*. „Math. Nachrichten" 1956, t. 15, caietul 3, p. 155—172.

Să aplicăm semiplanului $Y > 0$ transformarea

$$v = \frac{Z - \lambda(c_0)}{Z - \overline{\lambda(c_0)}}.$$

Ea transformă pe $Y > 0$ în cercul

$$|v| < 1$$

din planul (v), ducînd punctul $Z_0 = \lambda(c_0)$ în origine.

Funcția

$$v(\zeta) = \frac{\lambda[f(\zeta)] - \lambda(c_0)}{\lambda[f(\zeta)] - \overline{\lambda(c_0)}} \tag{42}$$

satisface deci condițiile de aplicare a lemei lui Schwarz și avem

$$|v'(0)| \leqslant \frac{1}{R}.$$

Printr-un calcul imediat se obține de aici,

$$R \leqslant \frac{2\Im\lambda(c_0)}{|c_1||\lambda'(c_0)|}, \tag{43}$$

unde $\Im$ reprezintă, ca de obicei, coeficientul lui i din cantitatea complexă care-i urmează.

De aici,

Teorema lui Landau. *Dacă $f(\zeta)$, olomorfă în $|\zeta| < R$, nu ia în acest cerc nici valoarea 0 nici valoarea 1, avem neapărat pentru R inegalitatea* (43).

Teorema lui Landau dă, așadar, pentru R o margine superioară, ce *depinde numai de c_0 și de c_1*. Ea duce, între altele, la concluzia că dacă o funcție $f(\zeta)$ este olomorfă într-un cerc a cărui rază este mai mare decît expresia din dreapta a inegalității (43), funcția ia neapărat în acest cerc ori valoarea 0, ori valoarea 1.

25. Teorema lui Picard asupra funcțiilor întregi demonstrată în secțiunea precedentă este o consecință a teoremei lui Landau.

Fie într-adevăr $G(z)$ o funcție întreagă, care nu ia nici valoarea 0, nici valoarea 1.

Dacă $G(z)$ nu este constantă, putem să alegem un punct z_0, unde $G'(z_0) \neq 0$.

În cercul $|z - z_0| < R$, $G(z)$ este însă olomorfă, oricare ar fi R. Or, aceasta contrazice (43), unde $c_1 = G'(z_0) \neq 0$, deoarece avem și $\lambda'(c_0) \neq 0$, $Z = \lambda(z)$ fiind reprezentare conformă în vecinătatea oricărui $z \neq 0$, 1 și ∞.

26. Teorema lui Schottky. Vom considera și de data aceasta o funcție olomorfă într-un cerc $|\zeta| < R$, care nu ia în acest cerc nici valoarea 0, nici valoarea 1.

Teorema pe care o vom demonstra dă o margine superioară a modulului $|f(\zeta)|$ pentru $|\zeta| = \rho < R$, în funcție de c_0 și $\frac{\rho}{R}$.

Schimbarea de variabilă $\zeta = \zeta' R$ ne permite să presupunem $R = 1$; mărginirea superioară a modulului se va face deci în funcție de c_0 și ρ. Funcția

$$Z = \lambda[f(\zeta)]$$

este uniformă și olomorfă în $|\zeta| < 1$.

Presupunem că am ales pentru ea aceeași determinare ca mai sus.

Cînd ζ descrie discul $|\zeta| \leqslant \rho < 1$, Z descrie un domeniu D din semiplanul $Y > 0$.

Pentru a ne da seama de poziția lui D în planul (Z), să facem transformarea liniară care ne duce la (42).

Dacă aplicăm lui $v(\zeta)$ lema lui Schwarz, obținem

$$|v(\zeta)| \leqslant |\zeta| \leqslant \rho$$

și, trecînd de la v la Z, prin

$$v = \frac{Z - Z_0}{Z - \overline{Z_0}},$$

cu $Z_0 = \lambda(c_0)$, se vede îndată că Z rămînîne într-un cerc Γ, definit prin

$$|Z - Z_0| \leqslant \rho |Z - \overline{Z_0}|. \tag{44}$$

Deci, $D \subset \Gamma$.

Or, din (44), se calculează cu ușurință ordonata minimă T_{c_0} a circumferinței lui Γ.

Se obține

$$T_{c_0} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \mathcal{J} \lambda(c_0). \tag{44}$$

Așadar, D se află în porțiunea din (Z) definită prin

$$Y \geqslant T_{c_0} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \mathcal{J} \lambda(c_0). \tag{45}$$

Dar, în reprezentarea

$$z = \mu(Z),$$

imaginea porțiunii (45) din (Z) nu poate conține pe $z = 0$ și distanța minimă a acestei imagini la $z = 0$ este > 0.

Fie $\delta(c_0, \rho)$ această distanță.

Avem deci pentru $|\zeta| \leqslant \rho$ (pentru că $\lambda [f(\zeta)] \in D$),

$$|z| = |f(\zeta)| \geqslant \delta(c_0, \rho), \tag{46}$$

unde $\delta(c_0, \rho)$ este funcție de c_0 și ρ, care *nu depinde de coeficienții* c_n $(n \geqslant 1)$ *ai lui* $f(\zeta)$.

27. Inegalitatea (46) ne dă o margine inferioară a modulului $|f(\zeta)|$ în $|\zeta| \leqslant \rho$. **Din** ea putem deduce însă cu ușurință o margine superioară.

Să observăm, într-adevăr, că funcția $\frac{1}{f(\zeta)}$ îndeplinește exact aceleași condiții ca $f(\zeta)$, adică este olomorfă în $|\zeta| < 1$ și **nu** ia în acest cerc nici valoarea 0, nici valoarea 1. Dar, dacă ținem seama de dezvoltarea (41) a lui $f(\zeta)$, obținem pentru $\frac{1}{f(\zeta)}$ o dezvoltare analogă, în care primul coeficient este $\frac{1}{c_0}$.

Ingalitatea (46) aplicată lui $\frac{1}{f(\zeta)}$ ne va da deci, în $|\zeta| \leqslant \rho$,

$$|f(\zeta)| \leqslant \frac{1}{\delta\left(\frac{1}{c_0}, \rho\right)} = k(c_0, \rho), \tag{47}$$

unde $k(c_0, \rho)$ este iarăși o funcție, *care nu depinde de* f, *ci numai de* c_0 *și* ρ.

Inegalitatea (47) constituie teorema lui Schottky : *Dacă* $f(\zeta)$ *este olomorfă în* $|\zeta| < 1$ *și nu ia, în acest cerc, nici valoarea* 0, *nici valoarea* 1, *există o funcție* $k(c_0, \rho)$ *care nu depinde de ceilalți coeficienți* c_n $(n \geqslant 1)$ *și astfel ca*

$$|f(\zeta)| \leqslant k(c_0, \rho),$$

pentru orice ζ *cuprins în* $|\zeta| \leqslant \rho$.

Dacă cercul $|\zeta| < 1$ este înlocuit cu $|\zeta| < R$, în locul lui ρ trebuie pus în membrul al doilea $\frac{\rho}{R}$.

28. Din teorema lui Schottky se deduce imediat limitarea superioară din teorema lui Landau.

Într-adevăr, inegalitățile lui Cauchy (cap. III) dau, pentru orice coeficient c_n al dezvoltării lui $f(\zeta)$,

$$|c_n| \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho^n} \qquad (\rho < R),$$

unde $M(\rho) = \max_{|\zeta| = \rho} |f(\zeta)|$.

Deci, după teorema lui Schottky,

$$|c_n| \leqslant \frac{k\left(c_0, \frac{\rho}{R}\right)}{\rho^n}, \text{ oricare ar fi } \rho < R.$$

Să luăm $\rho = \frac{R}{2}$; obținem

$$|c_n| \leqslant \frac{2^n k\left(c_0, \frac{1}{2}\right)}{R^n},$$

de unde se deduce

$$R \leqslant \frac{2\left[k\left(c_0, \frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}}{|c_n|^{\frac{1}{n}}},$$

ceea ce, în cazul $n = 1$, dă o margine superioară a lui R în funcție de c_0 și c_1, ca și teorema lui Landau.

Marginea superioară (42) obținută direct este însă, în general, mai mică decît cea de mai sus.

29. Mărginire uniformă a modulului $|f(\zeta)|$ pentru $|c_0| \leqslant C$. În cele de mai sus, nu am considerat variația expresiei lui T_{c_0} cu factorul $\mathcal{J}\lambda(c_0)$. Cum $\lambda(c_0)$ este în $Y > 0$, avem întotdeauna $\mathcal{J}\lambda(c_0) > 0$.

Să considerăm reprezentarea conformă pe Δ (fig. 43) a planului (z) tăiat după segmentul de dreaptă $(0, 1, \infty)$. În această reprezentare, care ne-a servit în definiția funcției $Z = \lambda(z)$ și pentru alegerea determinării $\lambda(c_0)$, punctele ∞ din Δ și din planul (z) tăiat se corespund.

Să facem pe c_0 să varieze în domeniul închis $\gamma(C)$ definit prin

$$|z| \leqslant C, \quad |z|^r \geqslant \frac{2}{3}, \quad |z-1| \geqslant \frac{2}{3},$$

unde $C \geqslant 2$. Cînd $|\zeta| \leqslant \rho < 1$, punctul $Z = \lambda[f(\zeta)]$ descrie un domeniu D cuprins în cercul Γ (a se vedea § 26) definit prin

$$|Z - Z_0| \leqslant \rho |Z - \bar{Z}_0|$$

și deci cuprins în banda

$$\frac{1+\rho}{1-\rho} M(C) \geqslant Y \geqslant \frac{1-\rho}{1+\rho} m(C) > 0,$$

unde $m(C)$ și $M(C)$ sînt valorile minimă și maximă ale lui $\mathcal{J}\lambda(c_0)$ cînd c_0 descrie $\gamma(C)$.

Deci $z = \mu(Z)$ dă în (z) o imagine a lui D care este mărginită de un număr $q(C, \rho)$ depinzînd numai de C și ρ.

Avem deci, cînd $c_0 \in \gamma(C)$ și $|\zeta| \leqslant \rho$,

$$|z| = |f(\zeta)| < q(C, \rho). \tag{48}$$

Să presupunem acum $|c_0| < \frac{2}{3}$. Atunci funcția $\frac{1}{f(\zeta)} = c_0' + c_1' z + \ldots$ este în aceleași condiții ca $f(\zeta)$ mai sus.

Cum $|c_0'| = \frac{1}{|c_0|} > \frac{3}{2}$, avem

$$\Im\lambda\,(c_0') > k\left(\frac{3}{2}\right) > 0,$$

unde $k\left(\frac{3}{2}\right)$ este minimul ordonatei lui $Z = \lambda\,(z)$ cînd z descrie circumferința $|z| = \frac{3}{2}$.

Așadar, cercul Γ, și deci D, sînt așezate în semiplanul

$$Y \geqslant \frac{1-\rho}{1+\rho}\,k\left(\frac{3}{2}\right).$$

Imaginea acestui semiplan prin $z = \mu\,(Z)$ are o distanță minimă $\delta\,(\rho)$ de $z = 0$ care este > 0 pentru orice $\rho < 1$ și care depinde numai de ρ $\left(\text{căci } k\left(\frac{3}{2}\right) \text{ este un factor numeric}\right)$.

Deci în $|\zeta| \leqslant \rho$ avem

$$\frac{1}{|f(\zeta)|} \geqslant \delta\,(\rho),$$

adică

$$|f(\zeta)| \leqslant \frac{1}{\delta\,(\rho)}.$$

Dacă avem $|c_0 - 1| < \frac{2}{3}$, funcția $1 - f(\zeta)$ este în condițiile lui $f(\zeta)$ de mai sus, și deci

$$|1 - f(\zeta)| \leqslant \frac{1}{\delta\,(\rho)},$$

adică

$$|f(\zeta)| \leqslant 1 + \frac{1}{\delta\,(\rho)}.$$

În rezumat, dacă $|c_0| \leqslant C$, avem în $|\zeta| \leqslant \rho < 1$

$$|f(\zeta)| < Q\,(C, \rho),$$

unde $Q\,(C, \rho)$ este cel mai mare din $1 + \frac{1}{\delta\,(\rho)}$ și $q\,(C, \rho)$, adică *nu depinde decît de* C *și* ρ.

Deci, pentru familia funcțiilor

$$f(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots,$$

olomorfe în $|\zeta| < 1$, care nu iau valoarea 0, nici valoarea 1 în acest cerc, și pentru care avem

$$|f(0)| = |c_0| \leqslant C,$$

C fiind o constantă oarecare, există o funcție $Q(C, \rho)$, astfel că în $|\zeta| \leqslant \rho$, avem

$$|f(\zeta)| \leqslant Q(C, \rho), \tag{49}$$

oricare ar fi f din familie.

Inegalitatea (49) dă o limitare uniformă a funcțiilor $f(\zeta)$, limitare dependentă numai de marginea superioară C a modulelor $|f(0)|$.

30. În capitolul V, § 10, am definit ceea ce se numește (după P. M o n t e l) o *familie normală* de funcții.

Reamintim că o familie $\{f\}$ de funcții $f(z)$ olomorfe într-un același domeniu D este numită normală *în* D dacă, din orice șir infinit extras din $\{f\}$, se poate extrage un șir infinit de funcții $f_n(z)$, $(n = 1, 2, ...)$, uniform convergent în orice domeniu compact cuprins în D.

Este important de specificat că, în această definiție, prin șir uniform convergent trebuie înțeles eventual și un șir care «ar tinde către constanta infinit», după expresia lui P. M o n t e l, adică un șir $f_n(z)$, astfel ca șirul $\frac{1}{f_n(z)}$ să tindă uniform către constanta zero.

31. Vom spune că o familie de funcții olomorfe în D este *normală într-un punct* $z_0 \in D$, dacă există un cerc cu centrul în z_0 și cuprins în D în interiorul căruia familia este normală în sensul definit mai sus.

T e o r e m ă. *Pentru ca o familie de funcții* $f(z)$ *olomorfe în* D *să fie normală în* D, *este necesar și suficient ca ea să fie normală în orice punct din* D.

Condiția este evident necesară, normalitatea în D atrăgînd, după definiție, normalitatea în orice $D_1 \subset D$.

Condiția este și suficientă.

Fiind dat un șir $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, extras din familia dată, și un punct $z_0 \in D$ există un șir

$$(S_0) \qquad f_1^0(z), \quad f_2^0(z), \ldots, f_n^0(z), \ldots,$$

extras din $f_n(z)$, uniform convergent în domeniul compact $\bar{\gamma}_0$, unde $\bar{\gamma}_0$ este un disc circular suficient de mic cu centrul în z_0.

Aceasta este o consecință a faptului că familia este presupusă normală în punctul $z_0 \in D$.

Fiecărui punct z din D putem face să-i corespundă un astfel de disc circular $\bar{\gamma}$, astfel că există un șir uniform convergent în $\bar{\gamma}$, extras din șirul $f_n(z)$ dat. Cum D poate fi socotit ca reuniune a unei infinități numărabile de domenii compacte $\overline{\Delta_n}$, iar fiecare din $\overline{\Delta_n}$ poate fi acoperit* cu un număr finit de $\bar{\gamma}$, domeniul D poate fi acoperit cu o infinitate numărabilă de discuri $\bar{\gamma}$.

Fie

$$\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_n, \ldots$$

aceste discuri și

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

centrele lor.

---

* Ca și mai sus, prin acoperire se înțelege că orice punct al lui $\overline{\Delta_n}$ este *interior* unui $\bar{\gamma}$ cel puțin.

Din șirul dat $f_n(z)$, se poate extrage un șir

$$(S_1) \qquad f_1^1(z),\ f_2^1(z),\ \ldots,\ f_n^1(z),\ \ldots,$$

analog cu (S_0), uniform convergent în $\overline{\gamma_1}$, deoarece familia este normală în z_1.

Din (S_1), se poate extrage, la rîndul lui, un șir uniform convergent în $\overline{\gamma_2}$, fie

$$(S_2) \qquad f_1^2(z),\ f_2^2(z),\ \ldots,\ f_n^2(z),\ \ldots,$$

din care se extrage un șir uniform convergent în $\overline{\gamma_3}$, și așa mai departe.

Șirul diagonal

$$f_1^1(z),\ f_2^2(z),\ \ldots,\ f_n^n(z),\ \ldots,$$

extras din toate șirurile precedente, va fi uniform convergent în oricare din domeniile compacte $\overline{\gamma_1}$, $\overline{\gamma_2}$, $\ldots$, $\overline{\gamma_n}$, $\ldots$ și deci în orice domeniu compact $\overline{\Delta} \subset D$.

Familia dată este deci normală în D.

32. Teorema lui Montel. Să considerăm acum o familie de funcții $\{f\}$, olomorfe într-un același domeniu D și astfel ca nici una din funcțiile familiei *să nu ia în D nici valoarea 0, nici valoarea 1.*

Teorema lui Montel afirmă că *familia aceasta este normală în D.*

După propoziția din paragraful precedent ajunge să arătăm că familia $\{f\}$ este normală în orice punct $z_0 \in D$, adică să arătăm că $\{f\}$ este normală în cercul $|z - z_0| < r$, cuprins în D.

Este evident că putem presupune $r = 1$, ceea ce se obține îndată prin schimbarea simplă de variabilă menționată mai sus, care menține normalitatea.

Să considerăm deci o familie $\{f\}$ de funcții olomorfe în $|z| < 1$ care nu iau, în acest cerc, nici valoarea 0, nici valoarea 1.

Din $\{f\}$, să alegem acele funcții $q(z)$, pentru care avem $|q(0)| \leqslant C$, C fiind o constantă arbitrară dată.

După (49), familia $\{g\}$ este mărginită în interiorul lui $|z| < 1$, în sensul din capitolul V, și deci, după principiul acumulării (cap. V), formează o familie normală în acest cerc. Dar funcțiile $\{h\}$, care fac parte din $\{f\}$ și nu sînt funcții $\{g\}$, sînt astfel ca

$$\frac{1}{|h(0)|} \leqslant \frac{1}{C}.$$

Familia $\left\{\frac{1}{h}\right\}$ este deci normală și deci și familia $\{h\}$, iar $\{f\}$ care este reuniunea lui $\{g\}$ cu $\{h\}$ este și ea normală*.

Cu ajutorul teoremei lui Montel și al teoremei din § 31 vom demonstra acum teorema generală a lui Picard.

33. Teorema generală a lui Picard. Să considerăm o funcție $f(z)$ uniformă în $|z| < R$, avînd în acest domeniu un singur punct singular, și anume în $z = 0$.

Teorema generală a lui Picard afirmă că *dacă $z = 0$ este punct singular esențial, $f(z)$ ia, în orice vecinătate a lui $z = 0$, orice valoare finită dată, în afară poate de o singură valoare excepțională.*

---

* Aceasta rezultă îndată din definiția normalității din § 30.

Fie, într-adevăr, a și b două valori distincte, pe care $f(z)$ nu le-ar lua într-o vecinătate a originii.

Ca în toate cazurile precedente, putem presupune $a = 0$, $b = 1$. În domeniul Γ, definit prin

$$\frac{1}{2^{k+2}} < |z| < \frac{1}{2^k} \quad (k \text{ un număr întreg, pozitiv fix}), \tag{50}$$

funcțiile familiei

$$f\left(\frac{z}{2^n}\right), \tag{51}$$

unde $n = 0, 1, 2, \ldots$, iau, în ansamblul lor, exact valorile pe care $f(z)$ le ia singură, în $|z| < \frac{1}{2^k}$.

Dacă $f(z)$ nu ia valorile 0 și 1 în $|z| < \frac{1}{2^k}$, funcțiile (51) formează deci o familie normală în Γ.

Din (51) se poate deci extrage un șir

$$f\left(\frac{z}{2^{n_1}}\right), f\left(\frac{z}{2^{n_2}}\right), \ldots, f\left(\frac{z}{2^{n_p}}\right), \ldots, \tag{52}$$

care converge uniform în orice domeniu compact din Γ și deci, în particular, pe circumferințe

$$|z| = \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{53}$$

Să presupunem mai întîi că limita este o funcție diferită de constanta infinit, în sensul din § 30. Atunci, după teorema lui Weierstrass din capitolul V, funcția limită este olomorfă și deci mărginită pe circumferința (53). Dar aceasta înseamnă că există un șir de circumferințe

$$|z| = \frac{1}{2^{n_p+k+1}},$$

cu $p = 1, 2, 3, \ldots$, pe care $|f(z)|$ este mărginit. De aici rezultă, în virtutea principiului maximului, că $|f(z)|$ este mărginit în vecinătatea lui $z = 0$. Or, aceasta nu este posibil dacă $z = 0$ este punct singular pentru $f(z)$ după teorema Cauchy-Riemann (Cap. IV, § 19).

Dacă limita funcțiilor (52) ar fi constanta infinit pe circumferința (53), am considera în locul lui $f(z)$ pe $\frac{1}{f(z)}$. Aceasta este și ea olomorfă în $|z| < 1$, în afara originii, deoarece $f(z)$ nu se anulează în $|z| < 1$ și nu ia nici valoarea 0, nici valoarea 1 în $z \neq 0$. Cum $z = 0$ este punct singular

esențial pentru $f(z)$, el rămîne un punct singular esențial pentru $\frac{1}{f(z)}$, și raționamentul duce deci la aceeași imposibilitate.

Funcțiile (51) nu pot, așadar, forma o familie normală în Γ și, prin urmare, $f(z)$ ia neapărat ori valoarea 0, ori valoarea 1 în Γ. Or, în (50), k poate fi luat oricît de mare și deci Γ face parte din orice vecinătate a lui $z = 0$ dată *a priori*. Teorema generală a lui Picard este deci demonstrată.

34. Se vede că teorema asupra funcțiilor întregi este un caz particular al teoremei generale, cazul cînd, în tot planul, nu există decît un singur punct singular esențial la ∞.

Dar, din teorema generală, se deduce îndată următoarea completare a primei teoreme : *orice funcție întreagă ia de un număr infinit de ori orice valoare finită, afară de cel mult o valoare excepțională.* Într-adevăr, valorile luate numai de un număr finit de ori nu mai sînt luate în anumite vecinătăți ale punctului singular.

35. În sfîrșit, putem și aici considera, în locul funcției olomorfe în jurul punctului singular esențial $z = 0$, o funcție meromorfă în jurul unui asemenea punct. Se obține atunci, exact ca și în cazul funcțiilor meromorfe (secțiunea precedentă), următoarea

Teoremă. *În vecinătatea unui punct singular esențial izolat $z = a$, o funcție uniformă și meromorfă în $z \neq a$ ia orice valoare finită sau infinită de o infinitate de ori, în afară cel mult de două valori excepționale.*

În cazul precedent, valoarea ∞ era exclusă dinainte, funcția fiind presupusă olomorfă în jurul lui $z = 0$.

În acel caz, rămînea deci posibilă o singură valoare excepțională finită.

36. Teorema lui Julia. În raționamentul de mai sus s-a văzut că funcțiile (51) nu pot constitui, în condițiile formulate pentru $f(z)$ în jurul lui $z = 0$, o familie normală în Γ.

După propoziția din § 31, există deci cel puțin un punct în domeniul definit prin (50), în care familia (51) *nu* este normală.

Fie $z = \alpha$ un asemenea punct.

Oricît de mic ar fi $\varepsilon > 0$, și oricare ar fi a și b $(a \neq b)$, există deci în $|z - \alpha| < \varepsilon$ cel puțin un punct în care una din funcțiile (51) ia valoarea a sau valoarea b. Traducînd acest fapt, pentru funcția $f(z)$, se obține următoarea teoremă a lui Julia, pe care o formulăm aici pentru funcțiile întregi, dar care se extinde la funcții mai generale :

O funcție întreagă admite întotdeauna cel puțin o semidreaptă OJ pornită din origine, astfel ca, oricare ar fi unghiul θ avînd OJ ca bisectoare, funcția ia, în interiorul lui θ, orice valoare finită, afară de o singură valoare excepțională cel mult.

Se observă, că teorema aceasta privește valorile pe care funcția le ia într-o regiune oricît de îngustă în jurul unei drepte ce pornește din punctul singular esențial, spre deosebire de teoremele precedente, în care era vorba de valorile luate în planul întreg sau în vecinătatea punctului singular.

Dreapta se poate înlocui cu ușurință, în teorema lui Julia, printr-o curbă oarecare depărtîndu-se la infinit. Dar și alte extensiuni sînt posibile.

Astfel, G. Valiron și elevii săi au dat, în această ordine de idei, o serie de rezultate care sînt, față de teorema lui Borel relativă la funcțiile întregi (cap. X), ceea ce teorema lui Julia și extensiunile ei sînt față de teorema lui Picard.

Toate aceste cercetări tind să pătrundă din ce în ce mai adînc în modul cum se distribuie în plan punctele în care o funcție analitică ia o valoare dată. Ele fac parte din teoria generală a repartiției valorilor, pe care o vom cerceta mai în de aproape într-un alt volum al acestui tratat.

37. Credem că, deși într-un caz particular, am putut da totuși o idee de felul cum funcțiile analitice multiforme intervin în mod natural în unele probleme privitoare la funcții uniforme, aruncînd o lumină nouă asupra unora din proprietățile acestora. În volumul următor, funcțiile multiforme și suprafețele riemanniene vor interveni sub diverse aspecte.

CUPRINSUL

Pag.

Prefață 3
Introducere 5

CAPITOLUL I

Noțiuni preliminare 11
I. Generalități asupra mulțimilor 11
II. Mulțimi de numere complexe 15
III. Transformări continue și transformări topologice 24

CAPITOLUL II

Funcții analitice într-un domeniu 32
I. Serii de puteri 32
II. Funcții olomorfe și meromorfe 44
III. Cîteva teoreme generale asupra funcțiilor olomorfe sau meromorfe în D 52

CAPITOLUL III

Teoria diferențială a olomorfiei 64
I. Funcțiile derivabile și reprezentarea conformă 64
II. Transformări liniare 72
III. Teoria lui Cauchy 83

CAPITOLUL IV

Funcțiile analitice considerate în întregul lor domeniu de existență 114
I. Prelungirea analitică 114
II. Puncte singulare pe circumferința cercului de convergență a unui element 120
III. Metodă de prelungire analitică efectivă: principiul simetriei 123
IV Singularități ale ramurilor uniforme de funcții analitice 127

CAPITOLUL V

Șirurile de funcții olomorfe și teorema fundamentală a reprezentării conforme 132
I. Șiruri uniform convergente de funcții olomorfe 132
II. Familii mărginite de funcții olomorfe 134
III. Reprezentarea conformă a unui domeniu simplu conex 141

Pag.

CAPITOLUL VI

Funcţii întregi şi funcţii meromorfe 147
I. Generalităţi asupra reprezentării funcţiilor întregi şi a funcţiilor meromorfe 147
II. Funcţiile sin z, ctg z, $\sigma(z)$ şi $\zeta(z)$ 157
III. Funcţia $\Gamma(s)$ şi funcţia $\zeta(s)$ a lui Riemann 169

CAPITOLUL VII

Funcţii meromorfe periodice 176
I. Funcţii dublu periodice 176
II. Expresiile funcţiilor dublu periodice cu ajutorul funcţiilor σ, ζ şi $\wp$ 180
III. Funcţia $\wp(z)$ şi relaţiile ei cu alte funcţii care stau la baza teoriei funcţiilor dublu periodice 190
IV. Funcţii simplu periodice 195

CAPITOLUL VIII

Funcţii întregi de ordin finit 199
I. Ordinul de creştere al funcţiilor întregi 199
II. Aplicaţii ale noţiunii de ordin la studiul proprietăţilor funcţiilor întregi 213

CAPITOLUL IX

Funcţii uniforme, singularităţi, domeniu de existenţă 218
I. Funcţii mărginite într-un cerc 218
II. Principiul lui Phragmen şi Lindelöff 222
III. Extensiunea funcţiei de reprezentare conformă la frontiera domeniului 232
IV. Singularităţi şi domenii de existenţă ale funcţiilor uniforme 235

CAPITOLUL X

Funcţii analitice multiforme 243
I. Domeniul de existenţă şi inversa unei funcţii analitice date 243
II. Suprafaţa riemanniană a unei funcţii analitice 248
III. Funcţii algebrice 258

CAPITOLUL IX

Aplicaţii ale funcţiilor multiforme la studiul unor funcţii uniforme 268
I. Integrala eliptică de prima speţă şi funcţiile meromorfe dublu periodice.... 268
II. Funcţii poligonale 281
III. Diverse teoreme asupra funcţiilor uniforme care decurg din existenţa funcţiei modulare 293